Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

**Aufgabe 1.** Es sei $\mathbb{Z}/m$ die Menge der Äquivalenzklassen aus Beispiel 2.11 (i) der Vorlesung.

(i) Zeigen Sie, dass die Regel
$$[a] + [b] = [a + b]$$
eine wohldefinierte Verknüpfung $+$ auf $\mathbb{Z}/m$ definiert. Genauer ist also zu zeigen: Ersetzt man den Repräsentanten $a \in [a]$ durch einen anderen Repräsentanten $a' \in [a]$, so ist das Ergebnis unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, also $[a + b] = [a' + b]$ in $\mathbb{Z}/m$, und analog für den rechten Summanden $b$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Regel
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$
eine wohldefinierte Verknüpfung $\cdot$ auf $\mathbb{Z}/m$ definiert.

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß für jede Primzahl $p$ die beiden obigen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}/p$ die Struktur eines Körpers mit neutralen Elementen $\overline{0} = [0]$ und $\overline{1} = [1]$ induzieren, also die Bedingungen (a) bis (c) aus Lemma 2.6 erfüllt sind. Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ verträglich ist. Für die Existenz der Inversen bezüglich $\cdot$ dürfen Sie ohne Beweis den kleine Fermatschen Satz (siehe Vorlesung) verwenden.

**Aufgabe 3.** Sei $U$ ein echter Untervektorraum eines Vektorraums $V$ über einem Körper $K$, und sei $\mathbf{a} \in V - U$.

a) Sei $\mathbf{u} \in U$. Zeigen Sie, dass es kein $\alpha \in K - \{0\}$ gibt mit $\mathbf{u} + \alpha\mathbf{a} \in U$.

b) Sei $\mathbf{b}$ ein weiterer Vektor aus $V - U$. Zeigen Sie, dass es höchstens ein $\alpha \in K$ gibt mit $\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$.

c) Zeigen Sie, dass
$$\mathbf{a} + U := \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{u} \text{ für ein } \mathbf{u} \in U\}$$
kein Untervektorraum von $V$ ist.

**Aufgabe 4.** Für eine Menge $M$ und einen Körper $K$ bezeichne $\mathrm{Abb}(M, K)$ die Menge aller Abbildungen von $M$ nach $K$. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(M, K)$ und $\alpha \in K$ definieren wir Abbildungen $f + g$ und $\alpha \cdot f$:

$$f + g \colon M \longrightarrow K \qquad\qquad \alpha \cdot f \colon M \longrightarrow K$$
$$x \mapsto f(x) + g(x) \qquad\qquad x \mapsto \alpha \cdot f(x)$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(M, K), +, \cdot)$ ein $K$-Vektorraum ist.