Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{N}$ (ohne Null) sind symmetrisch? Welche sind reflexiv? Welche sind transitiv?

(i) $x \sim y :\Leftrightarrow x \geq y$

(ii) $x \sim y :\Leftrightarrow x$ und y besitzen einen gemeinsamen Primfaktor (1 ist keine Primzahl)

(iii) $x \sim y :\Leftrightarrow x+y = xy$

(b) Für $x \in \mathbb{N}$ bezeichne $e_2(x)$ den Exponenten von 2 in der Primfaktorzerlegung von x. Zeigen Sie, dass

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad e_2(x) = e_2(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ definiert. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus? Induziert die Addition $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine wohldefinierte Verknüpfung auf der Quotientenmenge?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Körper K und beliebige Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ mit $\beta \neq 0$ und $\delta \neq 0$ gilt:

$$\alpha\beta^{-1} + \gamma\delta^{-1} = (\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta)^{-1}$$

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, und sei n eine natürliche Zahl. In der Vorlesung wurde eine Vektorraumstruktur auf K^n definiert. Einige Vektorraumaxiome wurden bereits in der Vorlesung und im Tutorium nachgewiesen. Weisen Sie die verbleibenden Axiome nach:

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a})$ für alle $\alpha, \beta \in K$, $\mathbf{a} \in K^n$

(iv) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ für das Einselement $1 \in K$ und für alle $\mathbf{a} \in K^n$

Aufgabe 4. Wir definieren auf der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ jeweils durch komponentenweise Addition und Multiplikation (vergleiche Blatt 1, Aufgabe 4). Kann man nun in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Null- und ein Einselement und Inverse bezüglich beider Verknüpfungen so wählen, daß $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zu einem Körper wird? Begründen Sie ihre Antwort.