Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 13
Abgabe 28.01.2019

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Schreiben Sie die folgende Permutationen als Produkt von Transpositionen. Geben Sie jeweils zwei Möglichkeiten an.

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Seien G, H Gruppen. Ähnlich wie in Definition 9.3 heißt eine Abbildung $f : G \to H$ *Gruppenhomomorphismus*, falls

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) \;\; \forall g_1, g_2 \in G$$

gilt. Ist f außerdem bijektiv, so heißt f *Gruppenisomorphismus*. Zeigen Sie für einen Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$:

(a) Für die neutralen Elemente $e_G \in G$ und $e_H \in H$ gilt $f(e_G) = e_H$. Außerdem gilt $f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \;\; \forall g \in G$.
(b) Ist f ein Gruppenisomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Gruppenisomorphismus.
(c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $\mathbb{Z}/3$ und A_3 an.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, daß die Abbildung $\Sigma_n \to \Sigma_{n+1}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) & n+1 \end{pmatrix}$$

aus der Vorlesung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4
Es sei $K = \mathbb{Q}$. Wandeln Sie das folgende inhomogene Gleichungssystem

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$$

in Matrixschreibweise

$$A \cdot x = b$$

für geeignete A und b um. Bestimmen Sie anschließend die Lösungsmenge $M_{A,0}$ des homogenen linearen Gleichungssystems und die Lösungsmenge $M_{A,b}$ des inhomogenen Gleichungssystems.