Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Beweisen Sie Lemma 9.20 aus der Vorlesung: Ist

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertierbar, so gilt

$$A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Gegeben seien die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{X} = (\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) \qquad \hat{Y} = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$$

$$X = (\begin{pmatrix}1\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}) \qquad Y = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix})$$

(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{T_{\hat{X},X}}$ und $M_{T_{\hat{Y},Y}}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ dargestellt wird durch die Matrix

$$M_{f,\hat{X},\hat{Y}} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & -2 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M_{f,X,Y}$.

Aufgabe 3 Es sei $K = \mathbb{R}$. Wandeln Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{x_2 + {}} \sqrt{2}x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3 &= 0 \\ \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$A \cdot x = 0$$

für geeignetes A um. Bestimmen Sie anschließend die Lösungsmenge $M_{A,0}$ des homogenen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 4 Es sei $K = \mathbb{Q}$. Wandeln Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$A \cdot x = 0$$

für geeignetes A um. Bestimmen Sie anschließend die Lösungsmenge $M_{A,0}$ des homogenen linearen Gleichungssystems.