Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Für fest gewähltes $n \geq 2$ und K Körper sei $T(n) \subset \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ die Menge aller *oberen Dreiecksmatrizen*, also jener Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ mit $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

(a) Wird $T(n)$ durch die übliche Addition und Multiplikation auf $\mathrm{Mat}_K(n \times n)$ zu einem Ring?

(b) Ist die Multiplikation auf $T(n)$ kommutativ? Ist $T(n)$ sogar ein Körper?

Aufgabe 2 Welche der folgenden reellen Matrizen sind invertierbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie zu den invertierbaren Matrizen jeweils die inverse Matrix. (*Diese Aufgabe kann evtl. erst ab Donnerstag bearbeitet werden.*)

Aufgabe 3 Betrachten Sie in $\mathbb{R}^6$ die folgenden beiden Untervektorräume:

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} U$, $\dim_R V$, $\dim_{\mathbb{R}}(U + V)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V)$.

Aufgabe 4 Sei K ein Körper, und sei M ein Matrix über K der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathrm{Mat}_K(a \times a)$, $B \in \mathrm{Mat}_K(a \times d)$ und $D \in \mathrm{Mat}_K(d \times d)$; $0 \in \mathrm{Mat}_K(d \times a)$ sei die Nullmatrix.
Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Rang}(M) \geq \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(D)$

(b) M ist genau dann invertierbar, wenn A und D invertierbar sind.