Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Berechnen Sie alle Potenzen der folgenden Matrizen (also $A^2, A^3, \ldots$ und $B^2, B^3, \ldots$):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 Bringen Sie die folgende Matrix durch elementare Zeilentransformationen von Typ III auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In den folgenden beiden Aufgaben bezeichne $E_m \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$ die Einheitsmatrix und $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$ die in der Vorlesung eingeführte Elementarmatrix, die nur einen einzigen von Null verschiedenen Eintrag besitzt, nämlich den Eintrag 1 an der Stelle (i, j). Ferner seien für einen Skalar $\alpha \in K^*$ "elementare Matrizen der Typen I-IV" wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} S_i(\alpha) &:= E_m + (\alpha - 1) \cdot E_{ii} \\ Q_i^j &:= E_m + E_{ij} \ (i \neq j) \\ Q_i^j(\alpha) &:= E_m + \alpha \cdot E_{ij} \ (i \neq j) \\ P_i^j &:= E_m - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \ (i \neq j) \end{aligned}$$

Lemma 8.5 der Vorlesung besagt, dass die Produkte dieser elementaren Matrizen mit einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ mit Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i, \cdots, \mathbf{a}_j, \cdots, \mathbf{a}_m$ wie folgt gegeben sind:

$$S_i(\alpha) \cdot A \overset{\mathrm{I}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \alpha \cdot \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \quad Q_i^j \cdot A \overset{\mathrm{II}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \quad Q_i^j(\alpha) \cdot A \overset{\mathrm{III}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \alpha \cdot \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \quad P_i^j \cdot A \overset{\mathrm{IV}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 8.5: weisen Sie die Gültigkeit der Gleichungen II und IV nach. (Die Gleichung I wird in den Präsenzaufgaben behandelt werden.)

Aufgabe 4 Beweisen Sie den zweiten Teil von Lemma 8.6: $P_i^j = Q_i^j \cdot Q_j^i(-1) \cdot Q_i^j \cdot S_i(-1)$.