Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die folgenden drei Matrizen (über einem Körper K) weder Rechts- noch Linksinverse bezüglich der Matrizenmultiplikation besitzen:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der folgenden beiden Endomorphismen von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis:

(i) Drehung um $90°$ im mathematisch negativen Sinne (also im Uhrzeigersinn).
(ii) Streckung entlang der y-Achse um den Faktor 2.

Aufgabe 3 Es seien A und B beliebige Teilmengen eines Vektorraums V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(i) $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$
(ii) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle \cup \langle B \rangle$
(iii) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$
(iv) $\langle A \cup B \rangle = \langle \langle A \rangle \cup \langle B \rangle \rangle$

Aufgabe 4 Für ein Polynom $p(t) \in K[t]$ und ein Element $\lambda \in K$ bezeichnet $p(\lambda)$ das Element von K, das man durch "Einsetzen" in p erhält. Für $p(t) = \sum_i \alpha_i t^i$ ist also $p(\lambda) = \sum_i \alpha_i \lambda^i$. Wir schreiben f_p für die so definierte Selbstabbildung von K:

$$\begin{aligned} f_p \colon K &\to K \\ \lambda &\mapsto p(\lambda) \end{aligned}$$

Es sei ϕ die Abbildung, die jedem Polynom p die entsprechende Selbstabbildung von K zuordnet:

$$\begin{aligned} \phi \colon K[t] &\to \operatorname{Abb}(K, K) \\ p &\mapsto f_p \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass f_p in der Regel keine lineare Abbildung ist.
(b) Zeigen Sie, dass ϕ bezüglich der in Blatt 3, Aufgabe 4 und Blatt 5, Aufgabe 3 definierten Vektorraumstrukturen auf $\operatorname{Abb}(K, K)$ und $K[t]$ linear ist.

Bemerkung: Ist $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist ϕ injektiv. Ein reelles oder komplexes Polynom p ist also eindeutig durch die zugehörige Funktion f_p bestimmt. Allgemeiner gilt dies über jedem Körper K, der unendlich viele Elemente besitzt. Zum Beweis verwendet man Aufgabenteil (b), also die Linearität von ϕ, zusammen mit der Tatsache, dass ein Polynom $p(t)$ genau dann auf einem Element $\lambda \in K$ verschwindet, wenn es den Faktor $t - \lambda$ enthält.