Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Für eine $(m \times n)$-Matrix M bezeichne f_M die durch M definierte lineare Abbildung $K^n \to K^m$, wie in Beispiel 6.3 (iii) der Vorlesung. Bestimmen Sie $f_M(\mathbf{v})$ für die folgenden reellwertigen Matrizen und Vektoren:

$$M \in \left\{ \begin{pmatrix} 16 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbf{v} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die Menge der Diagonalmatrizen $D(n)$ (Beispiel 7.3 (a) der Vorlesung) einen Untervektorraum des Matrizenraums $\mathrm{Mat}_K(n \times n)$ bildet.

Aufgabe 3 Seien $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen über dem gleichen Körper. Zeigen Sie, dass für jeden Untervektorraum $U \subset V$ gilt:

$$f^{-1}(f(U)) = U + \ker f.$$

Aufgabe 4 Seien U, V und W Untervektorräume eines Vektorraums L. Zeigen Sie, dass stets folgende Inklusion gilt:

$$(U \cap W) + (V \cap W) \subset (U + V) \cap W$$

Gilt ebenso die umgekehrte Inklusion? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.