Übungen zur Linearen Algebra I
Blatt 7
Abgabe 3.12.2018

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Beweisen Sie die Aussage aus Beispiel 6.3.(iv):

Sei K ein Körper, seien V, W, U K-Vektorräume und seien $f\colon V \longrightarrow W$, $g\colon W \longrightarrow U$ K-lineare Abbildungen. Dann ist auch die Komposition $g \circ f\colon V \longrightarrow U$ eine K-lineare Abbildung.

Aufgabe 2 Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear? Berechnen Sie in den linearen Fällen jeweils Kern und Bild der Abbildung.

$$f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x-y \end{pmatrix} \qquad h\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ x+2y \end{pmatrix}$$

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \qquad i\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5y \\ -x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen über dem gleichen Körper. Beweisen Sie (dies ist Teil (i) von Lemma 6.11 aus der Vorlesung): für beliebige Teilmengen $A \subset V$ gilt

$$f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle.$$

Aufgabe 4 Es seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K. Es sei $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ die Menge der K-linearen Abbildungen von V nach W. Auf dieser Menge definieren wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation wie folgt:

$$(f+g)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) \qquad (\forall f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W), \mathbf{v} \in V)$$
$$(\alpha \cdot f)(\mathbf{v}) := f(\alpha \cdot \mathbf{v}) \qquad (\forall \alpha \in K, f \in \mathrm{Hom}_K(V,W), \mathbf{v} \in V)$$

(i) Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, dass also die Abbildungen $f+g$ bzw. $\alpha \cdot f$ linear sind und somit tatsächlich in $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ liegen.
(ii) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Hom}_K(V,W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist.
(iii) Zeigen Sie, dass für jeden K-Vektorraum W die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(K,W) &\to W \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.