Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1 Beweisen Sie für einen beliebigen Untervektorraum U eines K-Vektorraums V Satz 4.18 aus der Vorlesung:

(i) $\dim_K U \leq \dim_K V$
(ii) Ist V endlich-dimensional, und ist $\dim_K U = \dim_K V$, so ist $U = V$.

Geben Sie ferner ein Beispiel für einen echten, unendlich-dimensionalen Untervektorraum eines Vektorraums an. (*Tipp:* Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen.)

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass für einen Vektorraum V über einem Körper K die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) $\dim_K V = \infty$
(ii) Es existiert eine Folge von Vektoren $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \in V)$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Familie $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ linear unabhängig ist.
(iii) Es existiert eine Folge von Vektoren $(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \in V)$, sodass die gesamte Familie $(\{\mathbf{v_i} \mid i \in \mathbb{N}\})$ linear unabhängig ist.
(iv) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein linear unabhängige Familie von n Vektoren in V.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die beiden folgenden Paare von Untervektorräumen $U, V \subset \mathbb{R}^3$ jeweils die Dimensionen von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

(i) $$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x = y \right\} \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; y = z \right\}$$

(ii) $$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; y = 0 \right\} \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} x = 2y \\ z = 3y \end{matrix} \right\}$$

Aufgabe 4 Beweisen Sie die folgenden Aussagen für einen Vektorraum L.
(a) Für jeden endlich erzeugten Untervektorraum $U \subset L$ und jeden Vektor $\mathbf{l} \in L$ gilt:

$$\dim(U + \langle \mathbf{l} \rangle) = \begin{cases} \dim U & \text{falls } \mathbf{l} \in U \\ \dim U + 1 & \text{falls } \mathbf{l} \notin U \end{cases}$$

(b) Für je zwei endlich erzeugte Untervektorräume $U, W \subset L$ mit $U \subset W$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) $\dim W = \dim U + 1$
(ii) $W = U + \langle \mathbf{l} \rangle$ für ein $\mathbf{l} \in L - U$
(iii) $U \subsetneq W$ und es existiert kein Untervektorraum $V \subset L$ mit $U \subsetneq V \subsetneq W$.