Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1. Seien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^5$:

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie für jeden der Untervektorräume $\langle \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$ eine Basis.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in K^2$$

genau dann eine Basis von K^2 bilden, wenn $ad - bc \neq 0$ ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Die folgende Menge formaler endlicher Summen wird als "Polynomring" über K bezeichnet:

$$K[t] := \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \alpha_i t^i \;\middle|\; \alpha_i \in K, \text{nur endlich viele } \alpha_i \neq 0 \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (\textstyle\sum_i \alpha_i t^i) + (\sum_i \beta_i t^i) &:= \textstyle\sum_i (\alpha_i + \beta_i) t^i \qquad && (\text{für } \textstyle\sum_i \alpha_i t^i, \sum_i \beta_i t^i \in K[t]) \\ \lambda \cdot (\textstyle\sum_i \alpha_i t^i) &:= \textstyle\sum_i (\lambda \cdot \alpha_i) t^i && (\text{für } \lambda \in K, \textstyle\sum_i \alpha_i t^i \in K[t]) \end{aligned}$$

eine Vektorraumstruktur auf $K[t]$ definieren.

(b) Zeigen Sie, dass der so definierte Vektorraum $(K[t], +, \cdot)$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 4. (a) Sei $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$ eine aufsteigende Folge von Untervektorräumen eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ wieder ein Untervektorraum von V ist.

(b) Geben Sie eine echt aufsteigende Folge $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \cdots$ von Untervektorräumen von $K[t]$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \neq K[t]$ an.

(c) Geben Sie eine echt absteigende Folge $U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq U_3 \supsetneq \cdots$ von Untervektorräumen von $K[t]$ mit $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \neq \{\mathbf{0}\}$ an.