Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Thomas Hudson

Jede Aufgabe wird mit vier Punkten bewertet.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Familien von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche bilden ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums? Welche bilden eine Basis?

(i) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ können wahlweise als Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden. Sind die Zahlen $1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aufgefasst als Vektoren, $\mathbb{R}$-linear unabhängig? Sind sie $\mathbb{Q}$-linear unabhängig? (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.)

Aufgabe 3. Seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ Vektoren eines Vektorraums über einem Körper K.

a) Jeder Vektor $\mathbf{a}$ aus der linearen Hülle $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ besitzt eine Darstellung der Form
$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{a}_i$$
mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Beweisen Sie Satz 4.5 aus der Vorlesung: Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für jeden Vektor $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ die Koeffizienten α_i in obiger Darstellung eindeutig bestimmt sind. (Hinweis: Sie können ähnlich wie in “Beachte:...” vor Definition 4.1 argumentieren.)

b) Es gilt stets
$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1} \rangle \subset \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n \rangle.$$
Zeigen Sie, dass die Inklusion echt (also keine Gleichheit) ist, falls $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängig sind. Gilt die umgekehrte Implikation ebenfalls? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4. Sei $\mathrm{Abb}(M, K)$ der Vektorraum aller Abbildung von der Menge M in den Körper K (siehe Aufgabe 4, Übungszettel 3). Für jedes $m \in M$ sei ein Vektor $f_m \in \mathrm{Abb}(M, K)$ definiert durch
$$\begin{aligned} f_m \colon M &\to K \\ m &\mapsto 1 \\ m' &\mapsto 0 \qquad (\text{für } m' \in M - \{m\}) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Familie $\{f_m \mid m \in M\}$ linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Familie $\{f_m \mid m \in M\}$ genau dann eine Basis von $\mathrm{Abb}(M, K)$ bildet, wenn M endlich ist.