I Vektorräume

§1 Erste Notationen

Mengentheoretische Grundbegriffe

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung gewisser Objekte (genannt die *Elemente* dieser Menge) zu einem Ganzen.
Eine Menge ist dadurch gegeben, indem man angibt, welche Elemente zu ihr gehören.

Beispiele

(i) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Setze $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

(ii) $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

(iii) $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen.

(iv) Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente hat. Sie heißt die *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Bezeichnungen

(i) Ist ein Objekt x ein Element einer Menge M, so setzt man dafür $x \in M$. Beispiele: $-2 \in \mathbb{Z}$ und $-2 \notin \mathbb{N}_0$.

(ii) Sind M, N Mengen, so heißt M eine *Teilmenge* von N (geschrieben $M \subseteq N$), wenn jedes Element von M ein Element von N ist.
Beispiele: a) Es gilt $\emptyset \subseteq X$ für jede Menge X und $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.
b) Für Mengen X, Y gilt $X = Y$ genau dann, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

(iii) Ist E eine Eigenschaft, so bezeichnet

$$\{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

die Menge aller Objekte x, die die Eigenschaft E haben. Sind M eine Menge und E eine Eigenschaft, so bezeichnet

$$\{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

die Menge aller Elemente x von M, die die Eigenschaft E haben. Also

$$\begin{aligned} \{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\} &= \\ \{x \mid x \in M \text{ und } x \text{ hat die Eigenschaft } E\} \end{aligned}$$

Beispiele: a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \mathbb{N}_0$.
b) $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt } p, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \neq 0 \text{ und } x = \frac{p}{q}\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.

Konstruktionen von Mengen

(i) Sind A, B Mengen, so heißt

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

die *Vereinigung* von A und B. Allgemeiner, sind $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Mengen, so setzt man

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n := \{x \mid \text{es gibt ein } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x \in X_i\}.$$

(ii) Sind A, B Mengen, so heißt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

der *Durchschnitt* von A und B. Allgemeiner, sind $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Mengen, so setzt man

$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n := \{x \mid \text{für jedes } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ gilt } x \in X_i\}.$$

(iii) Sind A und B Mengen, so heißt

$$A - B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

die *Differenzmenge* von A, B.

(iv) Sind A und B Mengen, so heißt

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

das *kartesische Produkt* von A, B. Allgemeiner, sind $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Mengen, so setzt man $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n ;= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \text{ für jedes } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ ist } x_i \in X_i\}$. Ist $X_1 = X_2 = \ldots = X_n =: X$, so setzt man

$$X^n := X \times X \times \ldots \times X.$$

Beispiel: Für Mengen A, B, C gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beweis. Wir zeigen
(I) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(II) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
zu (I): Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Da $x \in B \cup C$, gilt $x \in B$ oder $x \in C$. Wir betrachten diese beiden Fälle.
Fall 1: $x \in B$
Dann haben wir $x \in A$ und $x \in B$. Hieraus folgt $x \in A \cap B$ und damit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Fall 2: $x \in C$
Dann haben wir $x \in A$ und $x \in C$. Hieraus folgt $x \in A \cap C$ und damit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
zu (II): Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Wir betrachten diese beiden Fälle.
Fall 1: $x \in A \cap B$
Dann haben wir $x \in A$ und $x \in B$. Aus $x \in B$ folgt $x \in B \cup C$. Also haben wir $x \in A$ und $x \in B \cup C$, woraus folgt $x \in A \cap (B \cup C)$.
Fall 2: $x \in A \cap C$
Dann haben wir $x \in A$ und $x \in C$. Aus $x \in C$ folgt $x \in B \cup C$. Also haben wir $x \in A$ und $x \in B \cup C$, woraus folgt $x \in A \cap (B \cup C)$. $\square$

Für eine Menge M heißt

$$P(M) := \{X \mid X \text{ ist eine Teilmenge von } M\}$$

die *Potenzmenge* von M.

Für jede Menge A definiert man ein $|A| \in \mathbb{N}_0 \cup \{0\}$ durch

$$|A| := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{wenn } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

$|A|$ heißt die *Mächtigkeit* von A.

Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ (bezeichnet mit $f(x)$) zuordnet, $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$.
$f(x)$ heißt das *Bild* von x unter f, X heißt die $Defintionsmenge$ von f, Y heißt die *Zielmenge* von f.

Beispiele

(i) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$.
(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y + 1$.
(iii) Für eine Menge X heißt die Abbildung $X \to X$, $x \mapsto x$ die *Identität* von X. Sie wird mit id_X bezeichnet.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für jede Teilmenge M von X heißt

$$\begin{aligned} f(M) : &= \{y \in Y \mid \text{ es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in M\} \end{aligned}$$

das *Bild* von M unter f. Für jede Teilmene N von Y heißt

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}$$

das $Urbild$ von N unter f. Für jede Teilmenge M von X heißt

$$f|M : M \to Y,\ x \mapsto f(x)$$

die $Restriktion$ von f auf M.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ gibt, oder äquivalent, sind $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$, so ist $f(x) \neq f(x')$, oder äquivalent, sind $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$, so ist $x = x'$.
- *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = f(x)$ gibt.
- $bijektiv$, wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h. zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$.

Beispiele

(i) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ ist bijektiv, denn zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$, nämlich $x = y - 1$.
(ii) Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y + 1$ ist surjektiv und nicht injektiv.
(iii) Für jede Menge X ist die Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ bijektiv.

Zu einer bijektiven Abbildung $f : X \to Y$ haben wir die Abbildung

$$Y \longrightarrow X, \ y \longmapsto \text{das } x \in X \text{ mit } y = f(x).$$

Sie heißt die *Umkehrabbildung* von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Beispiele

(i) Nach dem obigen Beispiel ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y - 1$ die Umkehrabbildung zu der bijektiven Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$.

(ii) Die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist id_X, also $(\mathrm{id}_X)^{-1} = \mathrm{id}_X$.

Zu Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ haben wir die Abbildung

$$X \longrightarrow Z, \ x \longmapsto g(f(x)).$$

Sie heißt die *Verknüpfung* oder das *Kompositum* von f und g und wird mit $g \circ f$ bezeichnet. Also für alle $x \in X$ gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Für Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ haben wir die Abbildungen

$$h \circ (g \circ f) : X \longrightarrow Z$$

$$(h \circ g) \circ f : X \longrightarrow Z$$

Es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(Diese Eigenschaft nennt man die *Assoziativität* der Verknüpfungen von Abbildungen).

Gruppen

Definition. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \cdot)$ mit G eine nichtleere Menge und $\cdot$ eine Abbildung

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G, \ (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

so daß gelten

(I) Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(Assoziativität).

(II) Es gibt ein $e \in G$, so daß für alle $a \in G$ gilt

$$a \cdot e = a = e \cdot a$$

e ist eindeutig bestimmt und heißt das *neutrale Element*.

(III) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$, so daß

$$a \cdot b = e = b \cdot a$$

Zu vorgegebenem $a \in G$ ist b eindeutig bestimmt. Man nennt b das *Inverse* von a und setzt $a^{-1} := b$.

Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn für alle $a, b \in G$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.

Begründung für die Eindeutigkeitsaussagen in (II) und (III):
Ist $e' \in G$ mit $a \cdot e' = e' = e' \cdot a$ für alle $a \in G$, so ist $e = e'$, denn $e = e \cdot e' = e'$.
Ist $b' \in G$ mit $a \cdot b' = e = b' \cdot a$, so ist $b = b'$, denn $b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot b') = (b \cdot a) \cdot b' = e \cdot b' = b'$.

Beispiele

(i) Ist $\cdot$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen, so ist $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $1 \in \mathbb{R} - \{0\}$, das Inverse zu $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist die reelle Zahl $\frac{1}{a}$.

(ii) Ist $+$ die übliche Addition reeller Zahlen, so ist $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $0 \in \mathbb{R}$, das Inverse zu $a \in \mathbb{R}$ ist die reelle Zahl $-a$.

(iii) Sei M eine Menge. $S(M)$ bezeichnet die Menge aller bijektiven Abbildungen $M \to M$. Wir haben die Abbildung

$$\cdot : S(M) \times S(M) \longrightarrow S(M),\ (f, g) \longmapsto f \circ g$$

Das Paar $(S(M), \cdot)$ ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist $\mathrm{id}_M \in S(M)$, das Inverse zu $f \in S(M)$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1} \in S(M)$. Die Gruppe $(S(M), \cdot)$ heißt die *symmetrische Gruppe* oder *Permutationsgruppe* von M.

Lemma 1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann

(i) Für alle $a \in G$ gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

Beweis. i) Nach Definition von a^{-1} gilt $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$, woraus sich die Behauptung von (i) ergibt.
ii) Wir haben zu zeigen $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = e = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b)$. Wir zeigen die erste Gleichung: $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1})) = a \cdot ((b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1}) = a \cdot (e \cdot a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = e$. □

Ringe und Körper

Definition. Ein *Ring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, wobei R eine Menge und $+$ und $\cdot$ Abbildungen sind

$$+ : R \times R \longrightarrow R,\ (a, b) \longmapsto a + b$$
$$\cdot : R \times R \longrightarrow R,\ (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

so daß gelten

(I) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(Das neutrale Element von $(R, +)$ wird mit 0 bezeichnet und heißt das *Nullelement*. Das Inverse zu $a \in R$ in $(R, +)$ wird mit$-a$ bezeichnet).

(II) Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(Assoziativität von $\cdot$).

(III) Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

(Distributivität).

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt

- *kommutativ*, wenn für alle $a, b \in R$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Ring mit Einselement*, wenn es ein $1 \in R$ gibt, so daß für alle $a \in R$ gilt $1 \cdot a = a = a \cdot 1$.
  Diese Element ist eindeutig bestimmt (cf. Beweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements einer Gruppe) und heißt das *Einselement*.

Beispiele

(i) Sind $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation ganzer Zahlen, so sind die Tripel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ kommutative Ringe. Der erste Ring hat ein Einselement, der zweite nicht.
(ii) Sind $+$ und $\cdot$ die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen, so sind die Tripel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ kommutative Ringe mit Einselement.

Lemma 2. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Es gelten

(i) Für jedes $a \in R$ ist $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
(ii) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Beweis. i) Es gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = (a \cdot 0) + (a \cdot 0)$. Also für $x := a \cdot 0$ gilt $x = x + x$. Addition von $-x$ auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert $0 = x$.
ii) Mit (i) gilt $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = (a \cdot b) + (a \cdot (-b))$, woraus folgt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. $\square$

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement. Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit* von $(R, +, \cdot)$, wenn es ein $b \in R$ mit $a \cdot b = 1 = b \cdot a$ gibt. Das Element b ist eindeutig bestimmt (cf. die Eindeutigkeit des Inversen bei Gruppen). Man nennt b das *multiplikative Inverse* von a und setzt $a^{-1} := b$ und $\frac{1}{a} := b$. Es gelten

(I) Sind $a, b \in R$ Einheiten, so ist auch $a \cdot b \in R$ eine Einheit (und $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$).
(II) $1 \in R$ ist eine Einheit.
(III) Ist $a \in R$ eine Einheit, so ist auch $a^{-1} \in R$ eine Einheit (und $(a^{-1})^{-1} = a$).

Für einen Beweis von (I) und (III), siehe Beweis von Lemma 1. R^* bezeichnet die Menge aller Einheiten von R. Nach (I) haben wir die Abbbildung

$$\cdot : R^* \times R^* \longrightarrow R^*, \ (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

Das Paar $(R^*, \cdot)$ ist eine Gruppe (denn nach (II) und (III) sind (II) und (III) in der obigen Definition einer Gruppe erfüllt). Sie heißt die *Einheitengruppe* von $(R, +, \cdot)$.

Definition. Ein *Körper* ist ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement, so daß $0 \neq 1$ und jedes von 0 verschiedene Element von R eine Einheit von $(R, +, \cdot)$ ist.

Ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper, so ist $R^* = R - \{0\}$. Denn nach Defintion eines Körpers und Lemma 2 gilt $R - \{0\} \subseteq R^*$ und $0 \cdot b = 0 \neq 1$ für jedes $b \in R$, also $0 \notin R^*$.

Beispiele

(i) Für den Ring der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gilt $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.
(ii) Die Ringe $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.
(iii) Auf der 2-elementigen Menge $\{0, 1\}$ definieren wir kommutative Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ durch

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Das Tripel $(\{0,1\},+,\cdot)$ ist ein Körper. Er wird mit $\mathbb{F}_2$ bezeichnet.

Lemma 3. Sei $(R,+,\cdot)$ ein Körper. Sind a,b Elemente von R mit $a\cdot b=0$, so ist $a=0$ oder $b=0$.

Beweis. Angenommen, $a\neq 0$. Wir haben zu zeigen, daß $b=0$.
Da $a\neq 0$, haben wir das Inverse a^{-1}. Es gilt $b=1\cdot b=(a^{-1}\cdot a)\cdot b=a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0=0$, wobei wir für die vorletzte Gleichung unsere Voraussetzung $a\cdot b=0$ nutzen und die letzte Gleichheit nach Lemma 2 gilt. $\square$

Für einen Ring $(R,+,\cdot)$ schreibt man häufig nur R, und für Elemente $a,b\in R$ schreibt man oft ab statt $a\cdot b$.

§2 Vektorräume, Erzeugendensysteme und Dimension

Definition 1. Sei $K=(K,+,\cdot)$ ein Körper. Ein *K-Vektorraum* oder *Vektorraum über K* ist ein Tripel $(V,+,\cdot)$ mit V eine Menge und $+$ und $\cdot$ Abbildungen

$$+: V\times V\longrightarrow V,\ (v,w)\longmapsto v+w\quad\text{(Addition)}$$

$$\cdot: K\times V\longrightarrow V,\ (\lambda,v)\longmapsto \lambda\cdot v\quad\text{(Skalarenmultiplikation)}$$

so daß gelten

(I) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe. (Das neutrale Element von $(V,+)$ wird mit 0 bezeichnet, das Inverse zu $v\in V$ in $(V,+)$ wird mit $-v$ bezeichnet).
(II) $(\lambda\mu)\cdot v=\lambda\cdot(\mu\cdot v)$ für alle $\lambda,\mu\in K$ und alle $v\in V$.
(III) $(\lambda+\mu)\cdot v=(\lambda\cdot v)+(\mu\cdot v)$ für alle $\lambda,\mu\in K$ und alle $v\in V$.
$\lambda\cdot(v+w)=(\lambda\cdot v)+(\lambda\cdot w)$ für alle $\lambda\in K$ und alle $v,w\in V$.
(IV) $1\cdot v=v$ für alle $v\in V$.

Die Elemente von V heißen *Vektoren*, $0\in V$ heißt *Nullvektor*. Für $v,w\in V$ setze $v-w:=v+(-w)$.

Konventionen:
- Skalarenmultiplikation bindet stärker als Addition
- häufig schreibe λv statt $\lambda\cdot v$
- häufig schreibe V statt $(V,+,\cdot)$.

Beispiel 2.

(i) Seien $n\in\mathbb{N}$ und K ein Körper. Wir haben die Menge $K^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid x_i\in K \text{ für jedes } i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$. Wir definieren Abbildungen

$$\begin{aligned}+: K^n\times K^n &\longrightarrow K^n,\ (x,y)\longmapsto x+y\\ \cdot: K\times K^n &\longrightarrow K^n,\ (\lambda,x)\longmapsto \lambda\cdot x\end{aligned}$$

indem wir für alle $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in K^n$ und alle $\lambda\in K$ setzen
$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n):=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\in K^n$
$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n):=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)\in K^n$
Das Tripel $(K^n,+,\cdot)$ ist ein K-Vektorraum. Der Nullvektor ist $(0,0,\ldots,0)$, das Inverse zu $(x_1,x_2\ldots,x_n)$ ist $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$.

(ii) Sei K ein Körper. Es gibt einen 1-elementigen K-Vektorraum: Setze $V:=\{a\}$ und $a+a:=a$ und $\lambda\cdot a:=a$ für jedes $\lambda\in K$. Dann ist $(V,+,\cdot)$ ein K-Vektorraum.

(iii) Seien X eine Menge und K ein Körper. $M(X, K)$ bezeichne die Menge aller Abbildungen von X nach K. Wir definieren Abbildungen

$$\begin{aligned} + : M(X,K) \times M(X,K) &\longrightarrow M(X,K),\ (f,g) \longmapsto f+g \\ \cdot : K \times M(X,K) &\longrightarrow M(X,K),\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

indem wir für alle $f, g \in M(X, K)$ und alle $\lambda \in K$ und alle $x \in X$ setzen
$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$
$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$.
Das Tripel $(M(X, K), +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum. Der Nullvektor ist die konstante Abbildung $X \to K$ mit Wert 0, das Inverse zu $f \in M(X, K)$ ist die Abbildung $X \to K, x \mapsto -(f(x))$.
Für jede Menge S gibt es genau eine Abbildung von $\emptyset$ nach S. Deshalb ist $(M(X, K), +, \cdot)$ für $X = \emptyset$ ein 1-elementiger K-Vektorraum.

Lemma 3. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$ gelten

(i) Ist $v = 0$ oder $\lambda = 0$, so ist $\lambda v = 0$.
(ii) Ist $\lambda v = 0$, so ist $v = 0$ oder $\lambda = 0$.
(iii) $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$. Für $\lambda = 1$ erhalten wir $(-1)v = -v$

Beweis. Analog zu den Beweisen von §1, Lemma 2 und 3. □

Definition 4. Seien K ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Ein *Untervektorraum* von $(V, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge U von V, so daß gelten

(I) $0 \in U$.
(II) Für alle $v, w \in U$ ist $v + w \in U$.
(III) Für alle $u \in U$ und $\lambda \in K$ ist $\lambda u \in U$.

Bemerkung 5. Sei U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums $(V, +, \cdot)$.

(i) Nach (II) und (III) in Definition 4 haben wir die Abbildungen
$+ : U \times U \longrightarrow U, (v, w) \longmapsto v + w$
$\cdot : K \times U \longrightarrow U, (\lambda, u) \longmapsto \lambda u$
Das Tripel $(U, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.
(Denn: Wir überprüfen die Eigenschaften (I)-(IV) in Definition 1. Mit $(V, +, \cdot)$ erfüllt auch $(U, +, \cdot)$ die Eigenschaften (II)-(IV). Zu (I): Nach Forderung (I) in Definition 4 hat $(U, +)$ ein neutrales Element. Für $u \in U$ ist $-u = (-1)u$ (nach Lemma 3 (iii)) und $(-1)u \in U$ (nach (III) in Definition 4), also hat u ein Inverses in $(U, +)$).
(ii) In Verallgemeinerung von (II) und (III) in Definition 4 ist $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$.

Beispiel 6.

(i) Jeder Vektorraum V hat die Untervektorräume V und $\{0\}$.
(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Teilmenge $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.
(iii) Die Teilmenge $\{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$ von $M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $(M(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Lemma 7. Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind U_1 und U_2 Untervektorräiume von V, so ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V. Allgemeiner, ist $\mathcal{M}$ eine Menge von Untervektorräumen von V, so ist $\bigcap_{U \in \mathcal{M}} U := \{x \in V \mid x \in U \text{ für jedes } U \in \mathcal{M}\}$ ein Untervektorraum von V.

Beweis. Einfache Verifikation.

Proposition und Definition 8. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Teilmenge von V. Es gibt einen kleinsten Untervektorraum von V, der M enthält. (Denn: Ist $\mathcal{M}$ die Menge aller Untervektorräume von V, die M enthalten, so ist $W := \bigcap_{U \in \mathcal{M}} U$ ein Untervektorraum von V (nach Lemma 7), der M enthält, also $W \in \mathcal{M}$. Es ist $W \subseteq U$ für jedes $U \in \mathcal{M}$, also W das kleinste Element von $\mathcal{M}$).
Dieser Untervektorraum heißt der *von M erzeugte Untervektorraum von V* und wird mit $\langle M \rangle$ bezeichnet. Ist $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, so schreibt man auch $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ statt $\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \rangle$.

Beispiel: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Proposition 9. Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine nichtleere Teilmenge von V. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle M \rangle \quad = \quad & \{v \in V \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \text{ und} \\ & m_1, m_2, \ldots, m_n \in M \text{ mit } v = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_n m_n\}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Menge auf der rechten Seite obiger Gleichung werde mit N bezeichnet. Es gilt

(α) N ist ein Untervektorraum von V. ($0 \in N$, da $0 = 0 \cdot m$ für ein $m \in M$).
(β) $M \subseteq N$. (Denn für jedes $m \in M$ gilt $m = 1 \cdot m$).
(γ) Ist U ein Untervektorraum von V mit $M \subseteq U$, so ist $N \subseteq U$. (Dies folgt aus Bemerkung 5 (ii)).

$(\alpha), (\beta), (\gamma)$ besagen gerade, daß N der kleinste Untervektorraum von V ist, der M enthält. Also $N = \langle M \rangle$. □

Ein Vektor der Form $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_n m_n$ (mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$) heißt *Linearkombination* der Vektoren $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Definition 10. Sei V ein Vektorraum.

(i) Eine Teilmenge M von V heißt *Erzeugendensystem* von V, oder man sagt auch, V wird von M erzeugt, wenn $V = \langle M \rangle$.
(ii) V heißt *endlich erzeugt*, wenn V ein endliches Erzeugendensystem hat, d.h. wenn es eine endliche Teilmenge M von V mit $V = \langle M \rangle$ gibt.

Beispiel 11. Sei K ein Körper.

(i) Für jeden Vektorraum V ist V ein Erzeugendensystem von V.
(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den K-Vektorraum K^n. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ haben wir den Vektor

$$e_i := (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^n,$$

dessen i-te Koordinate gleich $1 \in K$ ist und alle anderen Koordinaten gleich $0 \in K$ sind. Für jedes $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ gilt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Also $K^n = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$. Insbesondere ist K^n endlich erzeugt.

(iii) Ist X eine unendliche Menge, so ist der K-Vektorraum $M(X, K)$ nicht endlich erzeugt. (Beweis später).

Definition 12. Für eine K-Vektorraum V definiert man $\dim V (= \dim_K V) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ durch

$$\dim V := \min\{|E| \mid E \text{ ein Erzeugendensystem von } V\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

$\dim V$ heißt die *Dimension* von V.

Bemerkung 13. Für einen Vektorraum V gelten

(i) Es ist $\dim V = \infty$ genau dann, wenn V nicht endlich erzeugt ist.
(ii) Es ist $\dim V \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn V endlich erzeugt ist.
(iii) Es ist $\dim V = 0$ genau dann, wenn $V = \{0\}$.

Beweis. (i) Es ist $\dim V = \infty$ genau dann, wenn $|E| = \infty$ für jedes Erzeugendensystem E von V, d.h. wenn jedes Erzeugendensystem von V unendlich ist, d.h. wenn V nicht endlich erzeugt ist.
(ii) Es ist $\dim V \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn es ein Ezeugendensystem E von V mit $|E| \in \mathbb{N}_0$ gibt, d.h. wenn V ein endlichen Erzeugendensystem hat, d.h. wenn V endlich erzeugt ist.
(iii) Es ist $\dim V = 0$ genau dann, wenn $\emptyset$ ein Erzeugendensystem von V ist. Da $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$, ist dies genau dann der Fall, wenn $V = \{0\}$. □

Beispiel 14.

(i) Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Nach Beispiel 11 (ii) hat der K-Vektorraum K^n ein n-elementiges Erzeugendensystem. Also gilt $\dim K^n \leq n$.
(ii) Sei v ein Element eines Vektorraums V mit $v \neq 0$. Dann $\dim\langle v \rangle = 1$.

§3 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition 1. Seien K ein Körper, V ein Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Ein n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ heißt *linear unabhängig*, wenn für alle $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ gilt: Ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Ein n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ heißt *linear abhängig*, wenn $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ nicht linear unabhängig ist, also wenn es $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, so daß $\lambda_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$.

Beispiel 2.

(i) Ist $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ linear unabhängig, so ist $v_i \neq v_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.
(Denn ist $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ und gibt es $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $v_i = v_j$, so ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ für das n-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $\lambda_i = 1, \lambda_j = -1$ und $\lambda_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i, j\}$, also $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ linear abhängig).

(ii) Ist $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ linear unabhängig, so ist $v_i \neq 0$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
(Denn ist $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ und gibt es $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $v_i = 0$, so ist $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ für das n-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $\lambda_i = 1$ und $\lambda_\ell = 0$ für alle $\ell \in \{1, 2, \dots, n\} - \{i\}$, also $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ linear abhängig).

(iii) Ist $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ linear unabhängig und sind $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i_\ell \neq i_k$ für $\ell \neq k$, so ist das m-Tupel $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}) \in V^m$ linear unabhängig.

(iv) Wir betrachten den Fall $n = 1$: Ist $v \in V$, so ist das 1-Tupel (v) linear unabhängig genau dann, wenn $v \neq 0$.
(Denn: Ist (v) linear unabhängig, so ist $v \neq 0$ nach (ii). Umgekehrt, ist $v \neq 0$, so ist (v) linear unabhängig, denn ist $\lambda \in K$ mit $\lambda v = 0$, so ist $\lambda = 0$ (nach §2, Lemma 3 (ii))).

(v) Sei $n \in \mathbb{N}$. Das n-Tupel $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in (K^n)^n$ von Vektoren von K^n ist linear unabhängig.
(Denn für jedes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ gilt $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ist also $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \in K^n$, so ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \in K$).

Proposition 3. Seien V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ sind äquivalent

(i) $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.

(ii) Zu jedem $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ gibt es genau ein $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Die Existenz von $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ folgt aus §2, Proposition 9. Zur Eindeutigkeit: Seien $(\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in K^n$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. Dann ist $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$, und da $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$, d.h. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. Wir haben $0 v_1 + \dots + 0 v_n = 0$. Aufgrund der Eindeutigkeit in (ii) (angewandt auf $v = 0 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$) folgt $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. $\square$

Lemma 4. Seien V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$.

(i) Ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ linear unabhängig, so gilt $v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$ für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) Ist $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ linear unabhängig und $w \in V - \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, so ist $(v_1, v_2, \dots, v_n, w) \in V^{n+1}$ linear unabhängig.

Beweis. (i) Wäre $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$, so gäbe es $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$, also $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$ und somit wäre

$(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig.
(ii) Sei $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \in K^{n+1}$ mit

$$(*) \qquad \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n + \mu w = 0$$

Zeige $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu = 0$.
Es ist $\mu = 0$, denn wäre $\mu \neq 0$, so wäre $w = (-\frac{\lambda_1}{\mu})v_1 + \ldots + (-\frac{\lambda_n}{\mu})v_n \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Mit $(*)$ folgt $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n = 0$. Hieraus und da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, ergibt sich $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. □

Lemma 5. Sei V ein Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist. Dann gibt es eine Folge $v_1, v_2, v_3, \ldots$ von Elementen von V, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ das n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist.

Beweis. Da V nicht endlich erzeugt ist, ist $V \neq \{0\}$. Wähle v_1 als ein Element von V mit $v_1 \neq 0$. Dann ist das Tupel (v_1) linear unabhängig (nach Beispiel 2 (iv)).
Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n$ schon gewählt, so daß $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist. Da V nicht endlich erzeugt ist, ist $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subsetneqq V$. Wähle v_{n+1} als ein Element von $V - \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ linear unabhängig nach Lemma 4 (ii). □

Ist V ein Vektorraum, so verstehen wir unter einem *Tupel von V* ein Element eines V^n für $n \in \mathbb{N}$. Für ein Tupel $\mathcal{A} \in V^n$ setzen wir

$$\ell(\mathcal{A}) := n \in \mathbb{N}$$

und nennen $\ell(\mathcal{A})$ die *Länge* von $\mathcal{A}$.

Satz 6. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $\mathcal{A}$ ein Tupel von V, das linear unabhängig ist und sei E ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt

$$\ell(\mathcal{A}) \leq |E|$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Länge von $\mathcal{A}$. Wir betrachen die Menge

$$L := \{\mathcal{B} \in V^n \mid \mathcal{B} \text{ ist linear unabhängig}\}$$

und definieren eine Abbildung

$$f : L \to L$$

folgendermaßen:
Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in L$. Nach Lemma 4 (i) ist $v_1 \notin \langle v_2, v_3, \ldots, v_n \rangle$. Also $\langle v_2, v_3, \ldots, v_n \rangle \neq V$. Da E ein Erzeugendensystem von V ist, folgt $E \not\subseteq \langle v_2, v_3, \ldots, v_n \rangle$. Wir wählen ein $e \in E$ mit $e \notin \langle v_2, v_3, \ldots, v_n \rangle$. Nach Lemma 4 (ii) ist das Tupel $(v_2, v_3, \ldots, v_n, e) \in V^n$ linear unabhängig, also ein Element von L. Wir setzen $f(\mathcal{B}) := (v_2, v_3, \ldots, v_n, e) \in L$.

Wir betrachten die n-fache Komposition von f mit sich selbst,

$$f \circ f \circ \ldots \circ f : L \to L$$

Wir wählen ein Element $\mathcal{B}$ von L. Sei $(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f)(\mathcal{B}) = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in L$. Da $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ linear unabhängig ist, ist $w_i \neq w_j$ für $i \neq j$ (Beispiel 2 (i)). Nach Konstruktion von f ist $w_1, w_2, \ldots, w_n \in E$. Also gilt $|E| \geq n = \ell(\mathcal{A})$. □

Korollar 7. Sei V ein Vektorraum.

(i) Für jedes linear unabhängige Tupel $\mathcal{A}$ von V gilt
$$\ell(\mathcal{A}) \leq \dim V$$
.

(ii) Für jedes Erzeugendensystem E von V gilt
$$\dim V \leq |E|$$
.

Beweis. (i) Nach Definition von $\dim V$ gibt es ein Erzeugendensystem E von V mit $\dim V = |E|$. Die Behauptung folgt aus Satz 6.
(ii) folgt aus der Definition von $\dim V$. □

Beispiel 8. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den K-Vektorraum K^n. Wir wissen, daß das n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ von K^n linear unabhängig ist (Beispiel 2 (v)) und die Menge $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ein Erzeugendensystem von K^n ist (§2, Beispiel 11 (ii)). Mit Korollar 7 erhalten wir
$$n \leq \dim K^n \leq n$$
Also $\dim K^n = n$.

Definition 9. Sei V ein Vektorraum. Eine *Basis* von V ist ein Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$), so daß gelten

(I) Die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(II) Das Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

Beispiel 10. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Das n-Tupel $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in (K^n)^n$ ist eine Basis des K-Vektorraums K^n (Beispiel 2 (v) und §2, Beispiel 11 (ii)). Sie heißt die *Standardbasis* von K^n oder die *kanonische Basis* von K^n.

Theorem 11. (Längen von Basen)
Sei V ein Vektorraum. Für jede Basis $\mathcal{A}$ von V gilt
$$\ell(\mathcal{A}) = \dim V$$

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Wir benutzen Korollar 7. Da $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist, gilt $n \leq \dim V$. Da $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, gilt $\dim V \leq n$. Also $\dim V = n = \ell(\mathcal{A})$. □

Theorem 12. (Existenz von Basen)
Sei V ein Vektorraum.

(i) Äquivalent sind
   (a) V hat eine Basis.
   (b) V ist endlich erzeugt und $V \neq \{0\}$.
   (c) $\dim V \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei V endlich erzeugt und $V \neq \{0\}$. Sei M ein Erzeugendensystem von V. Es gelten
   (a) Es gibt eine Basis von V bestehend aus Elementen von M, d.h. es gibt eine Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ von V mit $v_i \in M$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) Sei $(w_1, w_2, \dots, w_m) \in V^m$ ein linear unabhängiges Tupel von V. Dann läßt sich $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ durch Elemente von M zu einer Basis von V ergänzen, d.h. es gibt eine Basis $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ von V mit $n \geq m$, so daß $v_i = w_i$ jedes i mit $1 \leq i \leq m$ und $v_i \in M$ für jedes i mit $m + 1 \leq i \leq n$.

Bemerkung. Man kann den Begriff einer Basis eines Vektorraums etwas allgemeiner als Definition 9 fassen. Mit dieser allgemeineren Definition einer Basis erhält man statt Theorem 12 die Aussage: Jeder Vektorraum hat eine Basis. (Siehe Lineare Algebra II)

Beweis von Theorem 12. (ii) (b) Sei L die Menge aller linear unabhängigen Tupel $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$, so daß $v_i = w_i$ jedes i mit $1 \leq i \leq m$ und $v_i \in M$ für jedes i mit $m + 1 \leq i \leq n$. Es ist $L \neq \emptyset$ (denn das Tupel $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ ist ein Element von L). Die Längen der Tupel $\mathcal{A} \in L$ sind nach oben beschränkt (z.B. durch die Mächtigkeit eines endlichen Erzeugendensystems von V, nach Satz 6). Sei $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ein Element von L maximaler Länge. Nach Lemma 4 (ii) ist $M \subseteq \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$. Da M ein Erzeugendensystem von V ist, folgt, daß $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Also ist das Tupel $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von V.
(ii) (a) Da $V \neq \{0\}$, hat M ein Element w mit $w \neq 0$. Das 1-Tupel (w) ist linear unabhängig (Beispiel 2 (iv)). Nach (ii)(b) können wir (w) durch Elemente von M zu einer Basis von V ergänzen. Diese Basis besteht dann nur aus Elementen von M.
(i) Die Äquivalenz von (b) und (c) erhält man aus §2, Bemerkung 13.
(a) $\Rightarrow$ (b) : Sei $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V. Da $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, ist V endlich erzeugt. Da jedes $v_i \neq 0$ (Beispiel 2 (ii)), ist $V \neq \{0\}$.
(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus (ii)(a). □

Proposition 13. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum mit $V \neq \{0\}$. Setze $n := \dim V \in \mathbb{N}$. Sei $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$. Äquivalent sind

(i) $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist eine Basis von V.
(ii) $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig.
(iii) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) trivial.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Nach Theorem 12 (ii)(b) können wir $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ zu einer Basis $\mathcal{A}$ von V ergänzen. Da $\mathcal{A}$ die Länge n hat (Theorem 11), folgt $(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{A}$.
(i) $\Rightarrow$ (iii) trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Nach Theorem 12 (ii)(a) erhalten wir eine Basis $\mathcal{A}$ von V, indem wir eventuell einige Komponenten des Tupels $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ streichen. Da $\mathcal{A}$ die Länge n hat, folgt $(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathcal{A}$. □

Satz 14. Sei V ein K-Vektorraum. Ein Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ ist eine Basis von V genau dann, wenn es zu jedem $v \in V$ genau ein $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ gibt.

Beweis. Proposition 3 und §2, Proposition 9.

Proposition 15. (Untervektorräume und Dimension)
Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Es gelten

(i) U ist endlich erzeugt.
(ii) $\dim U \leq \dim V$.
(iii) Ist $\dim U = \dim V$, so ist $U = V$.

Beweis. (i) Angenommen, U ist nicht endlich erzeugt. Nach Lemma 5 existiert dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein linear unabhängiges Tupel $\mathcal{A}$ von U der Länge n. $\mathcal{A}$ ist auch ein linear unabhängiges Tupel von V. Mit Korollar 7 (i) erhalten wir $n \leq \dim V$. Also gilt $\dim V = \infty$, d.h. V ist nicht endlich erzeugt. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme.
(ii),(iii) Die Aussagen (ii) und (iii) gelten, wenn $U = \{0\}$. Sei nun $U \neq \{0\}$. Nach (i) ist U endlich erzeugt. Deshalb hat U eine Basis $\mathcal{A}$ (Theorem 12). $\mathcal{A}$ ist ein linear unabhängiges Tupel von U und damit auch ein linear unabhängiges Tupel von V. Wir erhalten

$$\dim U = \ell(\mathcal{A}) \text{ (Theorem 11)} \quad \text{und} \quad \ell(\mathcal{A}) \leq \dim V \text{ (Korollar 7 (i))}$$

Also folgt $\dim U \leq \dim V$.
Sei nun $\dim U = \dim V$. Dann haben wir $\ell(\mathcal{A}) = \dim V$. Ist $\mathcal{A} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, so folgt aus Proposition 13, daß $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Da $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq U$, folgt $V \subseteq U$. Also $U = V$. □

Veranschaulichung der Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$ für $n \in \{1, 2, 3\}$:
$n = 1:$ $\{0\}$ und $\mathbb{R}$ sind die einzigen Untervektorräume von $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.
$n = 2:$ Für jeden Untervektorraum U von $\mathbb{R}^2$ gilt (nach Proposition 15 (ii))

$$0 \leq \dim U \leq 2$$

- $\{0\}$ ist der einzige Untervektoraum von $\mathbb{R}^2$ der Dimesion 0.
- $\mathbb{R}^2$ ist der einzige Untervektorraun von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 2 (Proposition 15 (iii)).
- Die Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ der Dimension 1 sind die Geraden durch den Nullpunkt. Denn die Untervektorräume der Dimension 1 sind die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ der Form $\langle v \rangle$ mit $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, und die Teilmenge $\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ist die Gerade durch die Punkte $0, v$.

$n = 3:$ Für jeden Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$ gilt (nach Proposition 15 (ii))

$$0 \leq \dim U \leq 3$$

- $\{0\}$ ist der einzige Untervektoraum von $\mathbb{R}^3$ der Dimesion 0.
- $\mathbb{R}^3$ ist der einzige Untervektorraun von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 3 (Proposition 15 (iii)).

- Die Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 1 sind die Geraden durch den Nullpunkt. Denn die Untervektorräume der Dimension 1 sind die Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ der Form $\langle v\rangle$ mit $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, und die Teilmenge $\langle v\rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ ist die Gerade durch die Punkte $0, v$.
- Die Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 sind die Ebenen durch den Nullpunkt. Denn die Untervektorräume der Dimension 2 sind die Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ der Form $\langle u, v\rangle$ mit $(u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$ linear unabhängig (oder äquivalent, $u \neq 0$ und $v \notin \langle u\rangle$), und die Teilmenge $\langle u, v\rangle = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ mit $u \neq 0$ und $v \notin \langle u\rangle$ ist die Ebene durch die Punkte $0, u, v$.

§4 Summe von Untervektorräumen

Sind $W_1, W_2, \ldots, W_n$ Untervektorräume eines Vektorraums V, so setzt man

$$\sum_{i=1}^n W_i = W_1 + W_2 + \ldots + W_n := \{v \in V \mid \text{es gibt } w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \ldots, w_n \in W_n \text{ mit } v = w_1 + w_2 + \ldots + w_n\}$$

$\sum_{i=1}^n W_i$ ist ein Untervektorraum von V. Er ist der kleinste Untervektorraum von V, der $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ enthält, also $\sum_{i=1}^n W_i = \langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n\rangle$. $\sum_{i=1}^n W_i$ heißt die *Summe* von $W_1, W_2, \ldots, W_n$.

Definition 1. Sind $W_1, W_2, \ldots, W_n$ Untervektorräume eines Vektorraums V, so heißt V *direkte Summe* von $W_1, W_2, \ldots, W_n$, geschrieben $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$ oder $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$, wenn gelten

(I) $V = \sum_{i=1}^n W_i$
(II) Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt $W_j \cap \sum_{i\in\{1,2,\ldots,n\}-\{j\}} W_i = \{0\}$.

Der Fall $n = 2$ bedeutet: Sind U, W Untervektorräume eine Vektortraums V, so heißt V direkte Summe von U und W, geschrieben $V = U \oplus W$, wenn $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

Beispiel 2. i) Für jeden Vektorraum V gilt $V = V \oplus \{0\}$.
ii) Ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V, so gilt $V = \langle v_1\rangle \oplus \langle v_2\rangle \oplus \ldots \oplus \langle v_n\rangle$.

Lemma 3. Für Untervektorräume $W_1, W_2, \ldots, W_n$ eines Vektorraums V sind äquivalent

(i) $V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$
(ii) Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ mit $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$ Sei $v \in V$. Die Existenz von $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ mit $v = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ folgt aus der Tatsache, daß $V = \sum_{i=1}^n W_i$. Zur Eindeutigkeit: Seien $(w_1, w_2, \ldots, w_n), (w'_1, w'_2, \ldots w'_n) \in W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ mit

$$(*) \qquad w_1 + w_2 + \ldots + w_n = v = w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n$$

Zeige $(w_1, w_2, \dots, w_n) = (w_1', w_2', \dots w_n')$.
Aus $(*)$ folgt

$$w_1 - w_1' = (w_2' - w_2) + \dots + (w_n' - w_n)$$

Der Vektor auf der linken Seite dieser Gleichung ist ein Element von W_1, der Vektor auf der rechten Seite dieser Gleichung ist ein Element von $\sum_{i=2}^n W_i$. Da $W_1 \cap \sum_{i=2}^n W_i = \{0\}$, folgt $w_1 - w_1' = 0$, d.h. $w_1 = w_1'$. Analog zeigt man $w_j = w_j'$ für $j = 2, 3, \dots, n$.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ Offensichtlich gilt $V = \sum_{i=1}^n W_i$. Wir zeigen $W_1 \cap \sum_{i=2}^n W_i = \{0\}$. Dazu sei ein $x \in W_1 \cap \sum_{i=2}^n W_i$ gegeben. Es gibt $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_n \in W_n$ mit $w_1 = x = w_2 + \dots + w_n$. Also für $(w_1, 0, 0 \dots, 0)$, $(0, w_2, w_3, \dots, w_n) \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n$ gilt $w_1 + 0 + 0 + \dots + 0 = x = 0 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt $(w_1, 0, 0 \dots, 0) = (0, w_2, w_3, \dots, w_n)$. Also $0 = w_1 = x$. □

Lemma 4. Sind U, W Untervektorräume eines Vektorraums V und $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U^n$ und $(w_1, w_2, \dots, w_m) \in W^m$ Basen von U und W, so sind äquivalent

(i) $V = U \oplus W$
(ii) $(u_1, u_2, \dots, u_n, w_1, w_2, \dots, w_m) \in V^{n+m}$ ist eine Basis von V.

Allgemeiner, sind $W_1, W_2, \dots, W_n$ Untervektorräume eines Vektorraums V und $(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im_i}) \in W_i^{m_i}$ eine Basis von W_i für $i = 1, 2, \dots, n$, so sind äquivalent

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$
(ii) $(w_{11}, w_{12} \dots, w_{1m_1}, w_{21}, w_{22} \dots, w_{2m_2}, \dots, w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nm_n})$
$\in V^{m_1 + \dots + m_n}$ ist eine Basis von V.

Beweis. Nach §3, Satz 14 ist (ii) äquivalent zu der Aussage

$(*)$ Zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n$ mit $v = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

Nach Lemma 3 ist $(*)$ äquivalent zu (i). Also sind (i) und (ii) äquivalent. □

Korollar 5. Sind $W_1, W_2, \dots, W_n$ Untervektorräume eines endlich erzeugten Vektorraums V mit $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$, so gilt $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_n$.

Definition 6. Seien V ein Vektorraum und S ein Untervektorraum von V. Ein *lineares Komplement* von S in V ist ein Untervektorraum T von V mit $V = S \oplus T$.

Proposition 7. Sei S ein Untervektorraum eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann hat S ein lineares Komplement T in V.

Beweis. Ist $S = \{0\}$, so setze $T := V$. Sei nun $S \neq \{0\}$. Nach §3 Proposition 15 (i) und §3, Theorem 12 hat S eine Basis $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Nach §3, Theorem 12 (ii) läßt sich $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ zu einer Basis $(s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m)$ von V ergänzen. Setze $T := \langle t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$. Dann gilt $V = S \oplus T$ nach Lemma 4. □

Proposition 8. (Dimensionsformel für Untervektorräume) Seien V ein Vektorraum und U, W endlich erzeugte Untervektorräume von V. Dann sind auch die Untervektorräume $U \cap W$ und $U + W$ von V endlich erzeugt und es gilt

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Beweis. Nach Proposition 7 gibt es einen Untervektorraum S von U mit

(1) $U = (U \cap W) \oplus S$

und einen Untervektorraum T von W mit

(2) $W = (U \cap W) \oplus T$.

Es gilt

(3) $U + W = (U \cap W) \oplus S \oplus T$.

Beweis von (3). Wir überprüfen die Eigenschaften (I) und (II) von Definition 1.

(I) $(U \cap W) + S + T = ((U \cap W) + S) + ((U \cap W) + T) = U + W$.

(II) (α) $((U \cap W) + S) \cap T = \{0\}$

Denn: $((U \cap W) + S) \cap T = U \cap T = (U \cap W) \cap T = \{0\}$, wobei das erste Gleichheitszeichen aus (1), das zweite Gleichheitszeichen aus $T \subseteq W$ und das dritte Gleichheitszeichen aus (2) folgt.

(β) $((U \cap W) + T) \cap S = \{0\}$

Denn: Begründung analog zur Begründung von (α).

(γ) $(U \cap W) \cap (S + T) = \{0\}$

Denn: Sei $x \in (U \cap W) \cap (S + T)$, also $x \in U \cap W$ und $x = s + t$ mit $s \in S$, $t \in T$. Dann $s = x - t \in S \cap ((U \cap W) + T) = \{0\}$ (nach (β)). Mit $s = 0$ folgt $x = t \in (U \cap W) \cap T = \{0\}$ (nach (2)).

Aus $(1), (2), (3)$ und Korollar 5 folgen

(1)' $\dim U = \dim(U \cap W) + \dim S$

(2)' $\dim W = \dim(U \cap W) + \dim T$

(3)' $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + \dim S + \dim T$

Aus (1)',(2)',(3)' folgt die Behauptung. $\square$

II Lineare Abbildungen und Matrizen

§1 Definition und erste Eigenschaften linearer Abbildungen

Definition 1. Seien K ein Körper und V, W Vektorräume über K. Eine *lineare Abbildung* von V nach W, oder *Homomorphismus* von V nach W, ist eine Abbildung $f : V \to W$, für die gilt

(I) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$
(II) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in K, x \in V$.

Beispiel 2

(i) Die konstante Abbildung $V \to W, x \mapsto 0$ ist linear.
(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $f : V \to V,\ x \mapsto ax$ linear.
Denn: $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = a(\lambda x) = (a\lambda)x = (\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda f(x)$.
(iii) Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (2x_1 + (-1)x_2, x_1, 4x_1 + 9x_2)$ ist linear. Allgemeiner: Seien K ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Für jedes $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ sei ein Element $a_{ij} \in K$ gegeben. Dann ist die Abbildung

$$K^n \to K^m,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

mit $y_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ (für $i = 1, 2, \ldots, m$) linear. (Wir werden später sehen, daß jede lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ von dieser Form ist).

Lemma 3. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gelten

(i) $f(0) = 0$.
(ii) $f(-x) = -f(x)$ für jedes $x \in V$.
(iii) Für jeden Untervektorraum V' von V ist das Bild $f(V')$ ein Untervektorraum von W, für jeden Untervektorraum W' von W ist das Urbild $f^{-1}(W')$ ein Untervektorraum von V.
(iv) Ist f bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear.
(v) Ist U ein K-Vektorraum und $g : W \to U$ eine lineare Abbildung, so ist auch $g \circ f : V \to U$ linear.

Beweis. (i) Es gilt $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, woraus folgt $f(0) = 0$.
(ii) Es gilt $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, woraus folgt $f(-x) = -f(x)$.
(iii) Sei V' ein Untervektorraum von V. Wir zeigen, daß $f(V')$ ein Untervektorraum von W ist. Dazu verifizieren wir die Definitionseigenschaften eines Untervektorraums.

(I) $0 \in f(V')$ (Denn $0 \in V$ und somit $0 = f(0) \in f(V')$).
(II) $y + y' \in f(V')$ für alle $y, y' \in f(V')$. (Denn: Wähle $x, x' \in V'$ mit $f(x) = y, f(x') = y'$. Es ist $x + x' \in V'$ und somit $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in f(V')$).
(III) $\lambda y \in f(V')$ für alle $\lambda \in K, y \in f(V')$. (Denn: Wähle $x \in V'$ mit $y = f(x)$. Es ist $\lambda x \in V'$ und somit $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in f(V')$).

(iv) Seien $y, y' \in W$ und $\lambda \in K$. Seien x und x' die Elemente von V mit $y = f(x)$ und $y' = f(x')$. Dann $y + y' = f(x + x')$ und $\lambda y = f(\lambda x)$ und somit $f^{-1}(y + y') = x + x' = f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$ und $f^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda f^{-1}(y)$. $\square$

Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $y \in Y$, so setzt man

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

und nennt $f^{-1}(y)$ die *Faser* von f über y.

Definition 4. Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ setzt man

$$\mathrm{im}(f) := f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$
$$\ker(f) := f^{-1}(0) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$$

$\mathrm{im}(f)$ heißt das *Bild* von f und $\ker(f)$ heißt der *Kern* von f.

Nach Lemma 3 (iii) ist $\mathrm{im}(f)$ ein Untervektorraum von W und $\ker(f)$ ein Untervektorraum von V.

Definition 5. Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraums V. Für jedes $a \in V$ setzt man

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\} \subseteq V$$

$a + U$ heißt die *Nebenklasse* von U zu a.

Lemma 6. Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist für jedes $w \in W$ die Faser $f^{-1}(w)$ entweder leer oder eine Nebenklasse von $\ker(f)$. Im letzteren Fall gilt $f^{-1}(w) = a + \ker(f)$ für jedes $a \in f^{-1}(w)$.

Beweis. Sei $f^{-1}(w) \neq \emptyset$ und $a \in f^{-1}(w)$. Wir zeigen $f^{-1}(w) = a + \ker(f)$.
$\subseteq$: Sei $x \in f^{-1}(w)$. Für $u := x - a \in V$ gilt $f(u) = f(x) - f(a) = w - w = 0$, also $u \in \ker(f)$. Es ist $x = a + u \in a + \ker(f)$.
$\supseteq$: Sei $x \in a + \ker(f)$, also $x = a + u$ mit $u \in \ker(f)$. Dann $f(x) = f(a + u) = f(a) + f(u) = w + 0 = w$, d.h. $x \in f^{-1}(w)$. $\square$

Korollar 7. Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so sind äquivalent

(i) f ist injektiv.
(ii) Ist $v \in V$ mit $f(v) = 0$, so ist $v = 0$.
(iii) $\ker(f) = \{0\}$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Ist $v \in V$ mit $f(v) = 0$, so ist $f(v) = f(0)$ und somit $v = 0$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): (ii) besagt $\ker(f) \subseteq \{0\}$.
(iii)$\Longrightarrow$(i): Mit Lemma 6 folgt, daß jede Faser von f leer oder 1-elementig ist, d.h. f ist injektiv. $\square$

Proposition 8. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(i) Für jede Teilmenge M von V gilt $f(\langle M \rangle) = \langle f(M) \rangle$.
(ii) Sei M ein Erzeugendensystem von V. Es gilt:f ist surjektiv genau dann, wenn $f(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.
(iii) Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V. Es gilt: f ist injektiv genau dann, wenn $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W^n$ linear unabhängig ist.
(iv) Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V. Es gilt:f ist bijektiv genau dann, wenn $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W^n$ eine Basis von W ist.

Beweis. (i) Wir zeigen $\subseteq$ und $\supseteq$.
$\subseteq$: Wir haben zu zeigen, daß $\langle M\rangle \subseteq f^{-1}(\langle f(M)\rangle)$. Da $f^{-1}(\langle f(M)\rangle)$ ein Untervektorraum von V ist (Lemma 3 (iii)), genügt es zu zeigen, daß $M \subseteq f^{-1}(\langle f(M)\rangle)$, d.h. $f(M) \subseteq \langle f(M)\rangle$. Die letzte Aussage gilt offensichtlich.
$\supseteq$: Da $f(\langle M\rangle)$ ein Untervektorraum von W ist (Lemma 3 (iii)), genügt es zu zeigen, daß $f(M) \subseteq f(\langle M\rangle)$. Dies ist aber klar, da $M \subseteq \langle M\rangle$.
(ii) f ist surjektiv genau dann, wenn $W = f(V)$. Da M ein Erzeugendensystem von V ist, gilt $V = \langle M\rangle$ und somit $f(V) = f(\langle M\rangle)$ und mit (i) erhalten wir $f(V) = \langle f(M)\rangle$. Also ist f surjektiv genau dann, wenn $W = \langle f(M)\rangle$, d.h. wenn $f(M)$ ist ein Erzeugendensystem von W ist.
(iii) $\Longrightarrow$: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0$. Zeige $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Es ist $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n)$. Somit gilt $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0$, woraus folgt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ (Korollar 7). Aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ ergibt sich $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ (da $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist).
$\Longleftarrow$: Nach Korollar 7 genügt es zu zeigen: Ist $v \in V$ mit $f(v) = 0$, so ist $v = 0$.
Dazu: Wir schreiben $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann $0 = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$. Da $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ und somit $v = 0$.
(iv) folgt aus (ii) und (iii). $\square$

Korollar 9. Seien V, W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gelte $\dim V = \dim W$. Dann sind äquivalent

(i) f ist bijektiv.
(ii) f ist injektiv.
(iii) f ist surjektiv.

Beweis. Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Setze $w_i := f(v_i) \in W$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Nach Proposition 8 sind (i),(ii),(iii) jeweils äquivalent zu den folgenden Aussagen (i)',(ii)',(iii)'

(i)' $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n$ ist eine Basis von W.
(ii)' $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n$ ist linear unabhängig.
(iii)' $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

Nach Voraussetzung gilt $\dim W = \dim V = n$. Mit I, §3, Proposition 13 folgt dann, daß (i)',(ii)',(iii)' äquivalent sind. Also sind (i),(ii),(iii) äquivalent. $\square$

Lemma 10. Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Es gebe ein Erzeugendensystem M von V mit $f(x) = g(x)$ für jedes $x \in M$. Dann gilt $f = g$.

Beweis. Die Menge $U := \{x \in V \mid f(x) = g(x)\}$ ist ein Untervektorraum von V. Da M ein Erzeugendensystem von V ist mit $M \subseteq U$, folgt $V = U$. Also $f = g$. $\square$

Satz 11. Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Sei $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V und sei $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Beweis. Die Eindeutigkeit von f folgt aus Lemma 10.
Zur Existenz von f: Wir definieren eine Abbildung $f : V \to W$ folgendermaßen. Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ (I, §3, Satz 14) und setze

$$f(v) := \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n \in W.$$

Wir haben zu zeigen, daß f linear ist und $f(v_i) = w_i$ gilt.
f ist linear, denn: Seien $x, y \in V$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und $\mu, \mu_2, \ldots, \mu_n$ die Elemente von K mit

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\ y &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in K$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \\ \lambda x &= (\lambda\lambda_1) v_1 + (\lambda\lambda_2) v_2 + \ldots + (\lambda\lambda_n) v_n \end{aligned}$$

Nach Definition von f gilt dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n \\ f(y) &= \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n \\ f(x+y) &= (\lambda_1 + \mu_1) w_1 + (\lambda_2 + \mu_2) w_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) w_n \\ f(\lambda x) &= (\lambda\lambda_1) w_1 + (\lambda\lambda_2) w_2 + \ldots + (\lambda\lambda_n) w_n \end{aligned}$$

Hieraus folgt $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
Es gilt $f(v_i) = w_i$, denn: Wir haben $v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$ und nach Definition von f gilt dann

$$f(v_i) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 0 \cdot w_{i-1} + 1 \cdot w_i + 0 \cdot w_{i+1} + \ldots + 0 \cdot w_n = w_i.$$

□

Definition 12. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

(i) Ein *Isomorphismus* von V nach W ist ein Homomorphismus $f : V \to W$, der bijektiv ist.
(ii) V und W heißen *isomorph*, geshrieben $V \cong W$, wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt. (Dann gibt es auch einen Isomorphismus $W \to V$, z.B. die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ (beachte Lemma 3 (iv)).

Satz 13. Seien V, W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K. V und W sind isomorph genau dann, wenn $\dim V = \dim W$.

Beweis. Sind V, W isomorph, so gibt es einen Isomorphismus $f : V \to W$, und ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V, so ist $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \in W^n$ eine Basis von W (nach Proposition 8 (iv), also $\dim V = n = \dim W$.
Ist umgekehrt $\dim V = \dim W =: n \in \mathbb{N}$ und sind $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ und $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n$ Basen von V und W, so gibt es nach Satz 11 eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und nach Proposition 8 (iv) ist f ein Isomorphimus, also sind V, W isomorph. □

Korollar 14. Jeder endlich erzeugte Vektorraum V über einem Körper K mit $V \neq \{0\}$ ist isomorph zu einem K^n. Dabei ist n eindeutig bestimmt, nämlich $n = \dim V$.

Beweis. Wir wissen $\dim K^n = n$. Die Behauptung folgt aus Satz 13. □

Satz 15 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen). Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, wobei V endlich erzeugt ist. Dann sind auch die Vektorräume $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ endlich erzeugt und es gilt

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f).$$

Beweis. $\ker(f)$ ist als Untervektorraum von V endlich erzeugt. Ist E ein endliches Erzeugendensystem von V, so gilt $\mathrm{im}(f) = f(V) = f(\langle E\rangle) = \langle f(E)\rangle$ (nach Proposition 8 (i)), also hat $\mathrm{im}(f)$ ein endliches Erzeugendensystem.
Wir wählen ein lineares Komplement T von $\ker(f)$ in V, also T ein Untervektorraum von V mit $V = \ker(f) \oplus T$ (I, §4, Proposition 7). Für die Abbildung $g : T \to \mathrm{im}(f),\ x \mapsto f(x)$ gelten

- g ist linear.
- g ist injektiv (denn $\ker(g) = \ker(f) \cap T = \{0\}$, beachte Korollar 7).
- g ist surjektiv (denn $\mathrm{im}(f) = f(V) = f(\ker(f) + T) = f(\ker(f)) + f(T) = f(T) = g(T)$).

Also ist g ein Isomorphismus und mit Satz 13 folgt $\dim \mathrm{im}(f) = \dim T$. Wir erhalten $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{im}(f) = \dim \ker(f) + \dim T = \dim V$, wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $V = \ker(f) \oplus T$ und I, §4, Korollar 5 gilt. □

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W. Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet $f + g$ die Abbildung $V \to W,\ v \mapsto f(v)+g(v)$. Für $\lambda \in K$ und $f \in \mathrm{Hom}(V.W)$ bezeichnet λf die Abbildung $V \to W,\ v \mapsto \lambda(f(v))$. Die beiden Abbildungen

$$f + g : V \to W,\ v \mapsto f(v) + g(v)$$
$$\lambda f : V \to W,\ v \mapsto \lambda(f(v))$$

sind linear. Also haben wir Verknüpfungen

$$+ : \mathrm{Hom}(V, W) \times \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W),\ (f, g) \longmapsto f + g$$
$$\cdot : K \times \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W),\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda f$$

Satz 16. Für Vektorräume V, W über einem Körper K ist das Tripel $(\mathrm{Hom}(V, W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Beweis. Einfaches Verifizieren. Der Nullvektor ist die konstante Abbildung $V \to W,\ v \mapsto 0$. Das Inverse zu $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist die lineare Abbildung $V \to W,\ v \mapsto -(f(v))$. □

Sei V ein Vektorraum. Unter einem *Endomorphismus* von V versteht man eine lineare Abbildung $V \to V$. $\mathrm{End}(V)$ bezeichnet die Menge aller Endomorphismen von V. Also

$$\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$$

Nach obigem haben wir den Vektorraum $(\mathrm{End}(V), +, \cdot)$. Weiterhin haben wir die Verknüpfung

$$\circ : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V),\ (f, g) \longmapsto f \circ g$$

mit $f \circ g$ das Kompositum der Abbildungen f und g (beachte Lemma 3 (v)).

Satz 17. Für einen Vektorraum V ist das Tripel $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ ein Ring mit Einselement. Er heißt der *Endomorphismenring* von V. Das Einselement ist die Identität $\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$. Man schreibt auch $\cdot$ statt $\circ$, also $(\mathrm{End}(V), +, \cdot)$.

Beweis. Nachrechnen.

Sei V ein Vektorraum. Unter einem *Automorphismus* von V versteht man eine lineare Abbildung $V \to V$, die bijektiv ist. $\mathrm{Aut}(V)$ bezeichnet die Menge aller Automorphismen von V. Wir haben die Verknüpfung

$$\circ : \mathrm{Aut}(V) \times \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ (f, g) \longmapsto f \circ g$$

mit $f \circ g$ das Kompositum der Abbildungen f und g.

Satz 18. Für einen Vektorraum V ist das Paar $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ eine Gruppe. Sie heißt die *Automorphismengruppe* von V. Sie stimmt überein mit der Einheitengruppe des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$.

Beweis.

- $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ ist eine Gruppe, denn:
  $\circ$ ist assoziativ, da die Komposition von Abbildungen assozativ ist. $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ hat ein neutrales Element, nämlich $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Aut}(V)$ (für jedes $f \in \mathrm{Aut}(V)$ gilt $f \circ \mathrm{id}_V = f = \mathrm{id}_V \circ f$). Jedes $f \in \mathrm{Aut}(V)$ hat ein Inverses, denn die Umkehrabbildung f^{-1} von f ist ein Element von $\mathrm{Aut}(V)$ (nach Lemma 3 (iv)) und es gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V = f^{-1} \circ f$.
- $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{End}(V)^*$, denn:
  id_V ist das neutrale Element der Gruppe $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ und das Einselement des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$.
  $\supseteq$: Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ eine Einheit des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$, so gibt es ein $g \in \mathrm{End}(V)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_V = g \circ f$, woraus folgt, daß f bijektiv ist.
  $\subseteq$: Ist $f \in \mathrm{Aut}(V)$ und ist $g \in \mathrm{Aut}(V)$ das Inverse von f in $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$, so gilt $f \circ g = \mathrm{id}_V = g \circ f$, und somit ist f eine Einheit des Rings $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$.

$\square$

§2 Matrizen

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.

Eine $(m \times n)$-*Matrix über* K ist eine Abbildung $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow K$. Ist $a_{ij} \in K$ das Bild von $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ unter A (also $a_{ij} = A((i, j))$), so schreibt man statt A auch $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$ oder $(a_{ij})_{i,j}$ oder (a_{ij}) oder

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Eine $(m \times n)$-Matrix hat m Zeilen und n Spalten). Die Elemente $a_{ij} \in K$ heißen die *Koeffizienten* von A. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ heißt $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in K^n$ der *i-te Zeilenvektor* von A und für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ heißt $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$ der *j-Spaltenvektor* von A. A heißt *quadratisch*, wenn $m = n$.

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix über dem Körper $\mathbb{Q}$. Sie ist die Abbildung $A : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} \to \mathbb{Q}$ mit $(1, 1) \mapsto \frac{1}{2}, (1, 2) \mapsto 0, (2, 1) \mapsto 1, (2, 2) \mapsto -1, (3, 1) \mapsto 3, (3, 2) \mapsto 4$. Die Zeilenvektoren von A sind $(\frac{1}{2}, 0), (1, -1), (3, 4) \in \mathbb{Q}^2$ und die Spaltenvektoren von A sind $(\frac{1}{2}, 1, 3), (0, -1, 4) \in \mathbb{Q}^3$.

Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen über K wird mit $M(m \times n, K)$ bezeichnet. Mit unserer Definition von $M(X, K)$ als der Menge aller Abbildungen von einer Menge X nach K haben wir also

$$M(m \times n, K) = M(X, K) \text{ mit } X = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}.$$

Auf der Menge $M(X, K)$ haben wir eine Addition und eine Skalarenmultiplikation definiert. Übertragen auf die Schreibweise von Matrizen erhalten wir

Addition von Matrizen:

$$\begin{aligned} + : M(m \times n, K) \times M(m \times n, K) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ ((a_{ij})_{i,j}\ ,\ (b_{ij})_{i,j}) &\longmapsto (a_{ij})_{i,j} + (b_{ij})_{i,j} := (a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \end{aligned}$$

Skalarenmultiplikation von Matrizen:

$$\begin{aligned} \cdot : K \times M(m \times n, K) &\longrightarrow M(m \times n, K) \\ (\lambda\ ,\ (a_{ij})_{i,j}) &\longmapsto \lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} := (\lambda a_{ij})_{i,j} \end{aligned}$$

Neben der Addition und Skalarenmultiplikation von Matrizen gibt es eine Multiplikation von Matrizen, definiert durch

Multiplikation von Matrizen:

$$\begin{aligned} \cdot : M(m \times n, K) \times M(n \times \ell, K) &\longrightarrow M(m \times \ell, K) \\ ((a_{ij})_{i,j}\ ,\ (b_{ij})_{i,j}) &\longmapsto (a_{ij})_{i,j} \cdot (b_{ij})_{i,j} := (c_{ij})_{i,j} \text{ mit} \\ & \qquad c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

Proposition 1.

(i) Das Tripel $(M(m \times n, K), +, \cdot)$ (mit $\cdot$ die Skalarenmultiplikation) ist ein K-Vektorraum. Der Nullvektor ist die Matrix (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für alle (i, j), das Inverse zu der Matrix (a_{ij}) ist die Matrix $(-a_{ij})$.

(ii) $\dim M(m \times n, K) = mn$.

Beweis. i) Wir wissen die Aussagen von (i) allgemein für das Tripel $(M(X, K), +, \cdot)$.
ii) Für jedes $(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ sei $E(i, j) \in M(m \times n, K)$ die Matrix, so daß der (i, j)-Koeffizient gleich 1 und die anderen Koeffizienten gleich Null sind. Für alle $(a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ gilt dann $(a_{ij}) = \sum_{(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} a_{ij} E(i, j)$. Also ist $(E(1, 1), E(1, 2), \dots, E(1, n), \dots, E(m, 1), \dots, E(m, n))$ eine Basis des K-Vektorraums $M(m \times n, K)$. Deshalb gilt $\dim M(m \times n, K) = mn$. □

Lemma 2.

(i) Für alle $A \in M(m\times n, K)$, $B \in M(n\times \ell, K)$, $C \in M(\ell\times p, K)$ gilt $(A\cdot B)\cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
(ii) Für alle $A, B \in M(m\times n, K)$, $C \in M(n\times \ell, K)$ gilt $(A+B)\cdot C = (A\cdot C)+(B\cdot C)$.
(iii) Für alle $C \in M(m\times n, K)$, $A, B \in M(n\times \ell, K)$ gilt $C\cdot(A+B) = (C\cdot A)+(C\cdot B)$.
(iv) Für alle $\lambda \in K$, $A \in M(m \times n, K)$, $B \in M(n \times \ell, K$ gilt $(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$.
(v) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

E_n heißt die $(n \times n)$-*Einheitsmatrix*. Für jedes $A \in M(m \times n, K)$ gilt

$$E_m \cdot A = A = A \cdot E_n.$$

Beweis. Nachrechnen

Korollar 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Tripel $(M(n \times n, K), +, \cdot)$ (mit $\cdot$ die Multiplikation) ein Ring mit Einselement. Das Einselement ist E_n.

Beweis. Proposition 1 und Lemma 2.

Definition 4. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt *invertierbar*, wenn A eine Einheit des Rings $(M(n \times n, K), +, \cdot)$ ist, d.h. wenn es ein $B \in M(n \times n, K)$ mit $A \cdot B = E_n = B \cdot A$ gibt. B ist eindeutig durch A bestimmt. B heißt die *inverse Matrix* zu A und man setzt $A^{-1} := B$.
Die Menge aller invertierbaren Matrizen in $M(n \times n, K)$ wird mit $\mathrm{GL}(n, K)$ bezeichnet. Das Paar $(\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$ ist eine Gruppe (das neutrale Element ist E_n). Für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt $(A^{-1})^{-1} = A$ und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. (Siehe I, §1, Abschnitt 4).

Definition 5. Zu jeder Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ haben wir die Matrix

$${}^tA = (b_{ij}) \in M(n \times m, K) \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}.$$

${}^tA$ heißt die zu A *transponierte Matrix*.

Beispiel.

(i) Für $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(3\times 2, \mathbb{Q})$ gilt ${}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(2\times 3, \mathbb{Q})$.
(ii) Für $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ gilt ${}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$.

Es gelten

- i-ter Zeilenvektor von ${}^tA = i$-ter Spaltenvektor von A
- j-ter Spaltenvektor von ${}^tA = j$-ter Zeilenvektor von A
- Ist A quadratisch, so entsteht ${}^tA$ aus A durch Spiegelung an der Diagonalen.

Lemma 6.

(i) Für $A, B \in M(m \times n, K)$ gilt ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
(ii) Für $\lambda \in K$ und $A \in M(m \times n, K)$ gilt ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$.
(iii) Für $A \in M(m \times n, K)$ gilt ${}^t({}^tA) = A$.
(iv) Für $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times \ell, K)$ gilt ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.
(v) Ist $A \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so ist auch ${}^tA$ invertierbar und es gilt $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Beweis. (i)-(iv) Nachrechnen.
(v) Mit (iv) erhalten wir ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tE_n = E_n$ und ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \cdot A) = {}^tE_n = E_n$. Die beiden Gleichungen

$${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = E_n \text{ und } {}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = E_n$$

besagen, daß ${}^tA$ invertierbar ist und $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. □

§3 Beziehung zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

Wichtig für diesen Abschnitt ist die folgende Aussage aus I, §3, Satz 14: Ist $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V, so gibt es zu jedem $v \in V$ ein eindeutig bestimmtes $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Definition 1. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Sei $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und sei $m := \dim W \in \mathbb{N}$.
Für jede Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ von V und jede Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in W^m$ von W und jede Matrix $S = (s_{ij}) \in M(m \times n, K)$ definieren wir eine Abbildung $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ folgendermaßen:
Ist $v \in V$ und ist $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das eindeutig bestimmte Element von K^n mit $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$ und ist $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ das Element von K^m mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, so setze

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) := y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_m w_m \in W.$$

Da $y_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} x_k \in K$, gilt

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = (\sum_{k=1}^n s_{1k} x_k) w_1 + \ldots + (\sum_{k=1}^n s_{mk} x_k) w_m.$$

Die Abbildung $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ ist linear (cf. Beweis der Linearität im Beweis von §1, Satz 11). $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ heißt die *lineare Abbildung zu* $S, \mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Beispiel 2.

(i) In der Situation von Definition 1 gilt für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v_j) = s_{1j} w_1 + s_{2j} w_2 + \ldots + s_{mj} w_m$$

mit $(s_{1j}, s_{2j}, \ldots, s_{mj}) \in K^m$ der j-te Spaltenvektor von S.
(Denn es ist $v_j = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$ mit $x_k = 0$ für jedes $k \in$

$\{1, 2, \ldots, n\} - \{j\}$ und $x_j = 1$, und dann

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{mj} \end{pmatrix} \quad).$$

(ii) Wir betrachten die K-Vektorräume K^n und K^m. Sei $\mathcal{A} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n und sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ die Standardbasis von K^m. Sei $S = (s_{ij}) \in M(m \times n, K)$. Für die Abbildung $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : K^n \longrightarrow K^m$ gilt

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (y_1, \ldots, y_m) \text{ mit } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(denn es ist $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ und $y_1 e_1 + \ldots + y_m e_m = (y_1, \ldots, y_m)$). Wir können dies auch schreiben als

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : K^n \to K^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\sum_{k=1}^{n} s_{1k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} s_{mk} x_k).$$

(iii) Sei V ein K-Vektorraum und sei $n := \dim V \in \mathbb{N}$. Für jede Basis $\mathcal{A}$ von V gilt

$$(L_{E_n,\mathcal{A},\mathcal{A}} : V \to V) = (\mathrm{id}_V : V \to V)$$

(denn

$$E_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad).$$

Definition 3. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Sei $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und sei $m := \dim W \in \mathbb{N}$.
Für jede Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ von V und jede Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in W^m$ von W und jede lineare Abbildung $f : V \to W$ definieren wir eine Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$ folgendermaßen:
Für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sei $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ das Element von K^m mit $f(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \ldots + a_{mj} w_m$. Dann

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} := (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M(m \times n, K)$$

($(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ ist der j-te Spaltenvektor von $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$). $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ heißt die *Matrix zu* $f, \mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Beispiel 4.

(i) Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$ und die Standardbasen $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gilt

$$f(e_1) = f((1,0)) = (1,1,2) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$
$$f(e_2) = f((0,1)) = (0,-1,3) = 0e_1 + (-1)e_2 + 3e_2$$

und somit

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die drei Zeilenvektoren dieser Matrix ergeben sich aus den Koeffizienten der drei Koordinaten $1x_1 + 0x_2, 1x_1 + (-1)x_2, 2x_1 + 3x_2$ von $f((x_1, x_2))$.

(ii) Ist V ein Vektorraum mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$, so gilt für jede Basis $\mathcal{A}$ von V

$$M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A},\mathcal{A}} = E_n$$

Satz 5. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$. Seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in W^m$ eine Basis von W.

(i) Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $S := M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$, so gilt

$$f = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

(ii) Ist $S \in M(m \times n, K)$ und $f := L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$, so gilt

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = S$$

Beweis. (i) Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sei $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ das Element von K^m mit

$$f(v_j) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_m.$$

Dann ist $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ der j-te Spaltenvektor von $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = S$ und somit gilt nach Beispiel 2 (i)

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v_j) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_m.$$

Also gilt $f(v_j) = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v_j)$ für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Hieraus folgt $f = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ (nach §1, Lemma 10).

(ii) Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sei $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in K^m$ der j-te Spaltenvektor von S. Dann gilt nach Beispiel 2 (i)

$$f(v_j) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_m w_m.$$

Deshalb ist $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ der j-te Spaltenvektor von $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Also stimmt der j-te Spaltenvektor von S mit dem j-ten Spaltenvektor von $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ überein (für jedes $j \in \{1, 2, \ldots n\}$), d.h. $S = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$. □

Korollar 6. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V und W.
Die beiden Abbildungen

$$L : M(m \times n, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W),\ S \longmapsto L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$
$$M : \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow M(m \times n, K),\ f \longmapsto M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

sind bijektiv und zueinander Umkehrabbildungen (d.h. $L^{-1} = M$ und $M^{-1} = L$).

Beweis. Satz 5 (i) besagt $L \circ M = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(V,W)}$, und Satz 5 (ii) besagt $M \circ L = \mathrm{id}_{M(m\times n,K)}$. Die Gültigkeit dieser beiden Gleichungen ist äquivalent dazu, daß L und M bijektiv und zueinander Umkehrabbildungen sind. □

Beispiel 7. Zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $S = (s_{ij}) \in M(m \times n, K)$, so daß $f = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die Standardbasen von K^n und K^m, also

$$f : K^n \to K^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_m) \text{ mit } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oder

$$f : K^n \to K^m,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto (\sum_{k=1}^{n} s_{1k}x_k,\dots,\sum_{k=1}^{n} s_{mk}x_k)$$

Es ist $S = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$.

Beweis. Korollar 6, beachte Beispiel 2 (ii). $\square$

Proposition 8. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$. Seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^n$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in W^m$ eine Basis von W.

(i) Für alle $S, S' \in M(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ gelten

$$L_{S+S',\mathcal{A},\mathcal{B}} = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} + L_{S',\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

$$L_{\lambda S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda \cdot L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}\ ,$$

d.h. die Abbildung

$$M(m \times n, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W),\ S \longmapsto L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

ist linear.

(ii) Für alle $f, f' \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $\lambda \in K$ gelten

$$M_{f+f',\mathcal{A},\mathcal{B}} = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} + M_{f',\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

$$M_{\lambda f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = \lambda \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}\ ,$$

d.h. die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow M(m \times n, K),\ f \longmapsto M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

ist linear.

Beweis. (i) Wir zeigen $L_{S+S',\mathcal{A},\mathcal{B}} = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} + L_{S',\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Dazu haben wir zu zeigen, daß für jedes $v \in V$ gilt $L_{S+S',\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = (L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} + L_{S',\mathcal{A},\mathcal{B}})(v)$. Gemäß der Definition der Addition linearer Abbildungen haben wir also zu zeigen

$$(*)\quad L_{S+S',\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) + L_{S',\mathcal{A},\mathcal{B}}(v)$$

Dazu schreiben wir $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ mit $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$. Seien $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ und $(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$ die Elemente von K^m mit

$$(1)\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = S' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Unter Ausnutzung der Distributivität der Matrizenmultiplikation erhalten wir aus (1) die Gleichung

$$(2)\quad \begin{pmatrix} y_1 + y'_1 \\ \vdots \\ y_m + y'_m \end{pmatrix} = (S + S') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Aus (1) folgt

$$(3)\quad L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = y_1w_1 + \dots + y_mw_m \text{ und } L_{S',\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = y'_1w_1 + \dots + y'_mw_m$$

und aus (2) folgt

$$(4)\quad L_{S+S',\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = (y_1 + y'_1)w_1 + \dots + (y_m + y'_m)w_m$$

Aus (3) und (4) folgt $(*)$.
(ii) Nach Korollar 6 ist die Abbildung $L : M(m\times n, K) \to \mathrm{Hom}(V,W),\ S \mapsto L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ aus (i) bijektiv. Nach (i) ist L linear, und somit ist nach §1, Lemma 3 (iv) auch die Umkehrabbildung L^{-1} linear. Aber L^{-1} ist die Abbildung in (ii) (nach Korollar 6). □

Proposition 9. Seien V, W, U Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$, $m := \dim W \in \mathbb{N}$ und $\ell := \dim U \in \mathbb{N}$. Seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2 \ldots, v_n) \in V^n$, $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in W^m$ und $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \ldots, u_\ell) \in U^\ell$ Basen von V, W und U.

(i) Seien $S \in M(m \times n, K)$ und $T \in M(\ell \times m, K)$. Für die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V &\longrightarrow W \\ L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}} : W &\longrightarrow U \\ L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}} : V &\longrightarrow U \end{aligned}$$

gilt

$$L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}} = L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

(ii) Seien $f : V \to W$ und $g : W \to U$ lineare Abbildungen. Also haben wir

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{C} \\ V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

Es gilt

$$M_{g\circ f,\mathcal{A},\mathcal{C}} = M_{g,\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

Beweis. (i) Sei $v \in V$. Wir schreiben $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$. Seien $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ und $(z_1, z_2, \ldots, z_\ell)$ die Elemente von K^m und K^ℓ mit

$$(1)\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} &L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots + y_mw_m \\ &L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}}(y_1w_1 + y_2w_2 + \ldots + y_mw_m) = z_1u_1 + z_2u_2 + \ldots + z_\ell u_\ell \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(2)\quad L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}}(L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}(v)) = z_1u_1 + z_2u_2 + \ldots + z_\ell u_\ell$$

Unter Ausnutzung der Assoziativität der Matrizenmultiplikation erhalten wir aus (1)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix} = (TS) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

woraus sich ergibt

$$(3)\quad L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}}(v) = z_1u_1 + z_2u_2 + \ldots + z_\ell u_\ell$$

Aus (2) und (3) folgt $L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}} = L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$.
(ii) Auf die Matrizen

$$S := M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K) \text{ und } T := M_{g,\mathcal{B},\mathcal{C}} \in M(\ell \times m, K)$$

wenden wir (i) an und erhalten

$$L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}} = L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} \, .$$

Nach Satz 5 (i) gilt $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = f$ und $L_{T,\mathcal{B},\mathcal{C}} = g$. Also folgt

$$L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}} = g \circ f$$

woraus sich ergibt

$$M_{(L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}}),\mathcal{A},\mathcal{C}} = M_{g\circ f,\mathcal{A},\mathcal{C}} \, .$$

Nach Satz 5 (ii) gilt

$$M_{(L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{C}}),\mathcal{A},\mathcal{C}} = TS = M_{g,\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \, .$$

Also folgt $M_{g,\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = M_{g\circ f,\mathcal{A},\mathcal{C}}$. □

Proposition 10. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V und W.

(i) Sei $S \in M(m \times n, K)$. Die lineare Abbildung $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $m = n$ und die Matrix $S \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist. Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so ist $(L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$.

(ii) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $m = n$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist. Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so ist $M_{f^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = (M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}$.

Beweis. (i) Wir beweisen die beiden Implikationen getrennt. Zunächst nehmen wir an, daß $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ ein Isomorphismus ist und zeigen, daß dann $m = n$ und die Matrix $S \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist.
Da $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus ist, folgt $m = n$ nach §1, Satz 13. Zu dem Isomorphismus $f := L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ haben wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$, die ebenfalls linear ist. Da die Abbildung L in Korollar 6 surjektiv ist, gibt es eine Matrix $T \in M(n \times n, K)$ mit $f^{-1} = L_{T,\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Wir erhalten $L_{E_n,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \mathrm{id}_V = f^{-1} \circ f = L_{T,\mathcal{B},\mathcal{A}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{A}}$, wobei die erste Gleichung nach Beispiel 2 (iii) und die letzte Gleichung nach Proposition 9 (i) gilt. Aus $L_{E_n,\mathcal{A},\mathcal{A}} = L_{TS,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ folgt $E_n = TS$, da die Abbildung L in Korollar 6 injektiv ist. Ebenso haben wir $L_{E_n,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{id}_W = f \circ f^{-1} = L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ L_{T,\mathcal{B},\mathcal{A}} = L_{ST,\mathcal{B},\mathcal{B}}$, woraus sich ergibt $E_n = ST$. Aus den beiden Gleichungen $E_n = TS$ und $E_n = ST$ folgt, daß S invertierbar ist.
Nun nehmen wir an, daß $m = n$ und die Matrix $S \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist und zeigen, daß dann $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} : V \to W$ ein Isomorphismus ist und $(L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$.
Wir betrachten die lineare Abbildung $L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} : W \to V$. Wir haben

$$L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = L_{S^{-1}S,\mathcal{A},\mathcal{A}} = L_{E_n,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \mathrm{id}_V$$

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = L_{SS^{-1},\mathcal{B},\mathcal{B}} = L_{E_n,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{id}_W$$

wobei jeweils die erste Gleichung nach Proposition 9 (i) und die letzte Gleichung nach Beispiel 2 (iii) gilt. Aus den beiden Gleichungen

$$L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} \circ L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = \mathrm{id}_V$$

$$L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} \circ L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = \mathrm{id}_W$$

folgt, daß die Abbildung $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ bijektiv ist und $(L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$.
(ii) Wir wenden (i) mit $S := M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$ an. Nach Satz 5 (i) gilt $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{B}} = f$. Also erhalten wir:

f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $m = n$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(n \times n, K)$ invertierbar ist. Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so ist $f^{-1} = L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$, und somit $M_{f^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = M_{(L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}),\mathcal{B},\mathcal{A}}$, aber nach Satz 5 (ii) ist $M_{(L_{S^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}),\mathcal{B},\mathcal{A}} = S^{-1}$, also gilt $M_{f^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}} = (M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1}$. □

Lemma 11. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die lineare Abbildung id:$V \to V$.

(i) Für alle Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V ist die Matrix $M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(n \times n, K)$ invertierbar (d.h. $M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}(n, K)$).
(ii) Für alle Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V gilt $(M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = M_{\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{A}}$.
(iii) Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Die Abbildung

$$\{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ Basis von } V\} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K),\ \mathcal{B} \longmapsto M_{\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{A}}$$

ist bijektiv.

Beweis. (i),(ii) Die Abbildung id: $V \to V$ ist bijektiv. Nach Proposition 10 (ii) ist dann die Matrix $M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}}$ invertierbar und $(M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = M_{\mathrm{id}^{-1},\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Da $\mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$, folgt $(M_{\mathrm{id},\mathcal{A},\mathcal{B}})^{-1} = M_{\mathrm{id},\mathcal{B},\mathcal{A}}$.
(iii) Sei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$. Für jedes $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}} : V \to V$ ein Isomorphismus (nach Proposition 10 (i)) und somit $L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}}(\mathcal{A}) := (L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}}(v_1), L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}}(v_2), \ldots, L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}}(v_n)) \in V^n$ eine Basis von V (nach §1, Proposition 8 (iv)). Wir erhalten die Abbildung

$$\psi : \mathrm{GL}(n, K) \to \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ Basis von } V\},\ S \mapsto L_{S,\mathcal{A},\mathcal{A}}(\mathcal{A})$$

Die Abbildung in Lemma 11 (iii) sei mit φ bezeichnet. Mit Beispiel 2 (i) überprüft man

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id} \text{ und } \psi \circ \varphi = \mathrm{id}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß φ bijektiv ist. □

Satz 12. (Transformationsformel)

(i) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$ und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V und W.
  (a) Für Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ von V und W gilt

$$M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = (M_{\mathrm{id}_W,\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}}$$

  (b) Es gilt

$$\{M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{B}'} \mid \mathcal{A}', \mathcal{B}' \text{ Basen von } V, W\} = \\ \{S^{-1} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot T \mid S \in \mathrm{GL}(m, K) \text{ und } T \in \mathrm{GL}(n, K)\}$$

(ii) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V.
  (a) Für jede Basis $\mathcal{A}'$ von V gilt

$$M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{A}'} = (M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}})^{-1} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \cdot M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}}$$

  (b) Es gilt

$$\{M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{A}'} \mid \mathcal{A}' \text{ Basis von } V\} = \\ \{T^{-1} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \cdot T \mid T \in \mathrm{GL}(n, K)\}$$

Beweis. (i) (a) Es gilt $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$. Auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}' & & \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\ V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}_W} & W \end{array}$$

wenden wir Proposition 9 (ii) und erhalten

$$M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = M_{\mathrm{id}_W,\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}}$$

Mit Lemma 11 (i), (ii) folgt

$$M_{f,\mathcal{A}',\mathcal{B}'} = (M_{\mathrm{id}_W,\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1} \cdot M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \cdot M_{\mathrm{id}_V,\mathcal{A}',\mathcal{A}}$$

(i) (b) Die beiden Mengen, deren Gleichheit zu zeigen ist, sind Teilmengen von $M(m \times n, K)$. Wir zeigen die Gleichheit, indem wir die Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$ zeigen.
$\subseteq$ folgt aus (i) (a) (und Lemma 11 (i))
$\supseteq$ folgt aus (i) (a) und der Surjektivität in Lemma 11 (iii).
(ii) (a) folgt aus (i) (a) mit $W = V$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{A}'$.
(ii) (b) folgt aus (ii) (a) und der Surjektivität in Lemma 11 (iii). □

Bemerkung.

(i) Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ und $m := \dim W \in \mathbb{N}$ und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V und W, so daß die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}$ sehr einfache Gestalt hat, nämlich es gibt Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V und W, so daß für die Koeffizienten a_{ij} der Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} \in M(m \times n, K)$ gilt: Es gibt ein $r \in \{0, 1, \ldots, \min(m, n)\}$, so daß $a_{ii} = 1$ für alle i mit $1 \leq i \leq r$ und $a_{ij} = 0$ sonst.
Beweis. Übungsaufgabe

(ii) Sei V ein Vektorraum mit $\dim V \in \mathbb{N}$ und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. In der Vorlesung Lineare Algebra II wird das Problem behandelt, eine Basis $\mathcal{A}$ von V zu konstruieren, so daß die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ von einfacher Gestalt ist (Normalformenproblem).

§4 Rang einer linearen Abbildung und Rang einer Matrix

Definition 1. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man setzt

$$\mathrm{rk}(f) := \dim \mathrm{im}(f) \ \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

$\mathrm{rk}(f)$ heißt der *Rang* von f.

Definition 2. Seien K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$.
$R(A)$ bezeichnet den von den Zeilenvektoren von A erzeugten Untervektorraum von K^n, also

$$R(A) = \langle \{(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \mid i = 1, 2, \ldots, m\} \rangle \subseteq K^n$$

$R(A)$ heißt der *Zeilenraum* von A. $\dim R(A)$ heißt der *Zeilenrang* von A.
$C(A)$ bezeichnet den von den Spaltenvektoren von A erzeugten Untervektorraum von K^m, also

$$C(A) = \langle \{(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \mid j = 1, 2, \ldots, n\} \rangle \subseteq K^m$$

$C(A)$ heißt der *Spaltenraum* von A. $\dim C(A)$ heißt der *Spaltenrang* von A.
Wir werden in dem nachfolgenden Lemma 3 zeigen

$$(\text{Zeilenrang von } A) = (\text{Spaltenrang von } A)$$

Man setzt

$$\operatorname{rk}(A) := (\text{Zeilenrang von } A) = (\text{Spaltenrang von } A) \ \in \mathbb{N}_0$$

$\operatorname{rk}(A)$ heißt der *Rang* von A.

Lemma 3. In der Situation von Definition 2 gilt

$$(\text{Zeilenrang von } A) = (\text{Spaltenrang von } A)$$

Beweis. Ist $A = 0$, so ist $\dim R(A) = 0 = \dim C(A)$. Sei nun $A \neq 0$. Dann ist $R(A) \neq \{0\}$ und wir haben eine Basis $(u_1, u_2, \ldots, u_t) \in R(A)^t$ von $R(A)$ mit $t \in \mathbb{N}$. Jedes Element von $R(A)$ läßt sich als Linearkombination von $u_1, u_2, \ldots, u_t$ schreiben, insbesonder gilt dies für die Zeilenvektoren von A, also

$$(*) \begin{cases} (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) & = & \lambda_{11}u_1 + \lambda_{12}u_2 + \ldots + \lambda_{1t}u_t \\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) & = & \lambda_{21}u_1 + \lambda_{22}u_2 + \ldots + \lambda_{2t}u_t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) & = & \lambda_{m1}u_1 + \lambda_{m2}u_2 + \ldots + \lambda_{mt}u_t \end{cases}$$

mit $\lambda_{ij} \in K$. Für jedes $\ell \in \{1, 2, \ldots, t\}$ setze

$$v_\ell = (\lambda_{1\ell}, \lambda_{2\ell}, \ldots, \lambda_{m\ell}) \in K^m$$

Jeder Spaltenvektor von A ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_t$, nämlich ist $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{in}) \in K^n$ (für $i = 1, 2, \ldots, t$), so gilt nach $(*)$ für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) = u_{1j}v_1 + u_{2j}v_2 + \ldots + u_{tj}v_t.$$

Also folgt

$$C(A) \subseteq \langle v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle$$

Dann $\dim C(A) \leq t$. Damit ist gezeigt, daß für jede Matrix A gilt

$$\dim C(A) \leq \dim R(A)$$

Dann folgt sofort, daß für jede Matrix A auch gilt

$$\dim R(A) \leq \dim C(A)$$

denn $\dim R(A) = \dim C({}^tA) \leq \dim R({}^tA) = \dim C(A)$. □

Proposition 4. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K mit $\dim V \in \mathbb{N}$ und $\dim W \in \mathbb{N}$ und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V, W. Es gilt

$$\operatorname{rk}(f) = \operatorname{rk}(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})$$

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in W^m$. Sei $\varphi : W \to K^m$ die lineare Abbildung mit $\varphi(w_i) = e_i$ (für $i = 1, 2, \ldots, m$), φ ist ein Isomorphismus (§1, Proposition 8 (iv) und Satz 11). Wir erhalten den Isomorphismus

$$(1) \qquad \operatorname{im}(f) \xrightarrow{\sim} \varphi(\operatorname{im}(f)),\ x \longmapsto \varphi(x)$$

Es ist $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ und mit §1, Proposition 8 (i) folgt dann $\mathrm{im}(f) = \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n) \rangle$ und

$$\varphi(\mathrm{im}(f)) = \langle\, \varphi(f(v_1)), \varphi(f(v_2)), \ldots, \varphi(f(v_n))\,\rangle \tag{2}$$

Sei $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$. Dann $f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m$ und somit $\varphi(f(v_j)) = a_{1j}\varphi(w_1) + a_{2j}\varphi(w_2) + \ldots + a_{mj}\varphi(w_m) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{mj}e_m = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m$. Also folgt

$$\langle\, \varphi(f(v_1)), \varphi(f(v_2)), \ldots, \varphi(f(v_n))\,\rangle = C(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})$$

Wir erhalten dann mit (1) und (2)

$$\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} C(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})$$

Nach §1, Satz 13 folgt $\dim \mathrm{im}(f) = \dim C(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})$, d.h. $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}})$. □

Proposition 5.

(i) Für jedes $A \in M(m \times n, K)$ gilt $\mathrm{rk}(A) \leq \min(m, n)$.

(ii) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Nach (i) gilt $\mathrm{rk}(A) \leq n$. Es ist $\mathrm{rk}(A) = n$ genau dann, wenn A invertierbar ist.

Beweis. (i) $R(A)$ wird von m Vektoren erzeugt und somit gilt $\dim R(A) \leq m$. $C(A)$ wird von n Vektoren erzeugt und somit gilt $\dim C(A) \leq n$.
(ii) Zunächst nehmen wir an, daß $\mathrm{rk}(A) = n$ und zeigen, daß A invertierbar ist. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K^n$ die Spaltenvektoren von A. Da $n = \dim C(A)$ und $C(A) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, folgt, daß $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linear unabhängig ist (nach I, §3, Proposition 13), woraus sich ergibt, daß $\mathcal{B} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Basis von K^n ist (I, §3, Proposition 13). Sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis von K^n. Die Spaltenvektoren der Matrix $M_{\mathrm{id}_{K^n},\mathcal{B},\mathcal{A}}$ sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Also gilt $A = M_{\mathrm{id}_{K^n},\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Nach §3, Lemma 11 (i) ist die Matrix $M_{\mathrm{id}_{K^n},\mathcal{B},\mathcal{A}}$ invertierbar. Damit ist gezeigt, daß A invertierbar ist.
Nun nehmen wir an, daß A invertierbar ist und zeigen, daß $\mathrm{rk}(A) = n$. Sei $\mathcal{A}$ wieder die Standardbasis von K^n. Aufgrund der Surjektivität der Abbildung in §3, Lemma 11 (iii) gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ von K^n mit $A = M_{\mathrm{id}_{K^n},\mathcal{B},\mathcal{A}}$. Die Spaltenvektoren von $M_{\mathrm{id}_{K^n},\mathcal{B},\mathcal{A}}$ sind $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Also folgt $\mathrm{rk}(A) = n$. □

III Gauß-Algorithmus und Anwendungen

§1 Gauß-Algorithmus

Definition 1. Sei $A \in M(m \times n, K)$. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K^n$ die Zeilenvektoren von A. Also

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Die *elementaren Zeilenumformungen* von A sind die folgenden Operationen

(I) Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile von A ($i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$), also

$$\text{aus } A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ entsteht die Matrix } \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \in M(m \times n, K).$$

(II) Multiplikation der i-ten Zeile von A mit $\lambda \in K - \{0\}$ ($i \in \{1, 2, \ldots, m\}$), also

$$\text{aus } A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ entsteht die Matrix } \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \in M(m \times n, K).$$

(III) Addition des λ-fachen ($\lambda \in K$) der i-ten Zeile von A zu der j-ten Zeile von A ($i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$), also

$$\text{aus } A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ entsteht die Matrix } \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \in M(m \times n, K).$$

Analog zu Definition 1 definiert man die *elementaren Spaltenumformungen* einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$.

Definition 2. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ heißt von *Zeilenstufenform*, wenn gilt:

(I) $A = 0$ (d.h. alle $a_{ij} = 0 \in K$)

oder

(II) Es gibt $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ und $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so daß $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ und für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ der i-te Zeilenvektor $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ von A die Eigenschaft hat
- ist $i \leq r$, so ist $a_{ij} = 0$ für alle $j < j_i$ und $a_{ij_i} \neq 0$
- ist $i > r$, so $a_{ij} = 0$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$j_1, j_2, \ldots, j_r$ heißen die *Stufenindizes* von A.

Im Fall (II) ist A von der Form

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rj_r} & \dots & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

Satz 3. Zu jeder Matrix $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ gibt es eine Matrix $A' \in M(m \times n, K)$ in Zeilenstufenform, die aus A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ I und III hervorgeht.

Beweis. Die Matrix A' läßt sich mit Hilfe des *Gauß-Algorithmus* konstruieren, der folgendermaßen verläuft:
Schritt 1:
Ist $A = 0$ oder A 1-zeilig, so sind wir fertig. Sei $A \neq 0$ und A nicht 1-zeilig. Sei dann j_1 das kleinste Element von $\{1, 2, \dots, n\}$, so daß der j_1-te Spaltenvektor von A ungleich Null ist. Nach eventuellem Vertauschen der ersten Zeile von A mit einer weiteren Zeile von A, können wir annehmen, daß $a_{1j_1} \neq 0$. Nach Addition des λ-fachen ($\lambda \in K$, λ passend) der ersten Zeile von A zu den weiteren Zeilen von A, können wir annehmen, daß $a_{2j_1} = a_{3j_1} = \ldots = a_{mj_1} = 0$.
Schritt 2:
Sei $A_1 \in M((m-1) \times n, K)$ die Matrix mit

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hline
\multicolumn{9}{|c|}{} \\
\multicolumn{9}{|c|}{A_1} \\
\multicolumn{9}{|c|}{} \\
\hline
\end{pmatrix}$$

(Die Zeilen von A_1 werden mit $2, 3, \dots, m$ nummeriert).
Man verfährt mit A_1 wie in Schritt 1 mit A verfahren wurde. Also: Ist $A_1 = 0$ oder A_1 1-zeilig, so sind wir fertig. Sei $A_1 \neq 0$ und A_1 nicht 1-zeilig. Sei dann j_2 das kleinste Element von $\{1, 2 \dots, n\}$, so daß der j_2-te Spaltenvektor von A_1 ungleich Null ist. Nach eventuellem Vertauschen der ersten Zeile von A_1 mit einer weiteren Zeile von A_1, können wir annehmen, daß $a_{2j_2} \neq 0$. Nach Addition des λ-fachen ($\lambda \in K$, λ passend) der ersten Zeile von A_1 zu den weiteren Zeilen von A_1, können wir annehmen, daß $a_{3j_2} = a_{4j_2} = \ldots = a_{mj_2} = 0$.

Schritt 3:
Sei $A_2 \in M((m-2) \times n, K)$ die Matrix mit

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \multicolumn{9}{|c|}{} \\ \multicolumn{9}{|c|}{A_2} \\ \multicolumn{9}{|c|}{} \\ \hline \end{array} \right)$$

(Die Zeilen von A_2 werden mit $3, 4, \dots, m$ nummeriert).
Man verfährt mit A_2 wie in Schritt 1 mit A verfahren wurde. Also: Ist $A_2 = 0$ oder A_2 1-zeilig, so sind wir fertig. Sei $A_2 \neq 0$ und A_2 nicht 1-zeilig. Sei dann j_3 das kleinste Element von $\{1, 2, \dots, n\}$, so daß der j_3-te Spaltenvektor von A_2 ungleich Null ist. ...

$$\vdots$$

Nach endlich vielen Schritten bricht der Algorithmus ab. Die entstehende Matrix hat Zeilenstufenform. □

Beispiel. Auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$$

wenden wir den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Vertauschung von Zeile 1 und 2 ergibt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Addition des (-1)-fachen und (-2)-fachen von Zeile 1 zu Zeile 3 und 4 ergibt

$$\left(\begin{array}{|cccc|} \multicolumn{1}{c}{3} & 1 & 0 & \multicolumn{1}{c}{2} \\ \hline 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -8 \\ \hline \end{array} \right)$$

Addition des (-2)-fachen von Zeile 2 zu Zeile 4 ergibt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Addition des 2-fachen von Zeile 3 zu Zeile 4 ergibt

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

A' ist eine Matrix in Zeilenstufenform mit den Stufenindizes $j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 4$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

§2 Basen von Untervektorräumen $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle \subseteq K^n$

Lemma 1. Seien $A, A' \in M(m \times n, K)$, wobei A' aus A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen hervorgeht. Dann

(i) $R(A) = R(A')$
(ii) $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A')$

Beweis. (i) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K^n$ die Zeilenvektoren von A. Wir dürfen annehmen, daß A' aus A durch 1 elementare Zeilenumformung hervorgeht. Wir betrachten die drei elementaren Zeilenumformungen aus §1, Definition 1. Die Aussage $R(A) = R(A')$ sind dann die drei folgenden einfach zu verifizierenden Aussagen
(I) $\langle a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m \rangle = \langle a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_m \rangle$
(II) $\langle a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_m \rangle = \langle a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_m \rangle$ (mit $\lambda \in K - \{0\}$)
(III) $\langle a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_m \rangle = \langle a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + \lambda a_i, \ldots, a_m \rangle$ (mit $i \neq j, \lambda \in K$).
(ii) $\operatorname{rk}(A) = \dim R(A) = \dim R(A') = \operatorname{rk}(A')$. □

Lemma 2. Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit $A \neq 0$. Dann

(i) Die von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A bilden eine Basis von $R(A)$.
(ii) $\operatorname{rk}(A)$ stimmt überein mit der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A.
(iii) Sei r die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A, seien $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Stufenindizes von A und setze $T := \{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n. Dann ist $\langle \{e_t \mid t \in T\} \rangle$ ein lineares Komplement von $R(A)$ in K^n.

Beweis. (i) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rj_r} & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij_i} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, r$. Seien $a_1, a_2, \dots, a_m \in K^n$ die Zeilenvektoren von A. Dann $R(A) = \langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$. Wir haben zu zeigen, daß $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ linear unabhängig ist. Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K$ und setze

$$v := \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r \in K^n$$

Wir haben zu zeigen, daß aus $v = 0 = (0, 0, \dots, 0) \in K^n$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0 \in K$. Dazu

- $\lambda_1 a_{1j_1}$ ist die j_1-te Koordinate von v, also $\lambda_1 a_{1j_1} = 0$. Da $a_{1j_1} \neq 0$, folgt $\lambda_1 = 0$.
- Da $\lambda_1 = 0$, ist $\lambda_2 a_{2j_2}$ die j_2-te Koordinate von v, also $\lambda_2 a_{2j_2} = 0$. Da $a_{2j_2} \neq 0$, folgt $\lambda_2 = 0$.

  $\vdots$
- Da $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{r-1} = 0$, ist $\lambda_r a_{rj_r}$ die j_r-te Koordinate von v, also $\lambda_r a_{rj_r} = 0$. Da $a_{rj_r} \neq 0$, folgt $\lambda_r = 0$.

(ii) folgt aus (i).
(iii) Wir benutzen die Notationen des Beweises von (i). Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ definieren wir ein $b_k \in K^n$ durch

- Ist $k \in T = \{1, 2, \dots, n\} - \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$, so $b_k := e_k$
- $b_{j_1} := a_1, b_{j_2} := a_2, \dots, b_{jr} := a_r$

Dann ist die Matrix $B = (b_{ij}) \in M(n \times n, K)$, deren Zeilenvektoren gerade $b_1, b_2, \dots, b_n$ sind, eine Matrix in Zeilenstufenform

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $b_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Nach (i) ist dann $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ linear unabhängig und somit eine Basis von K^n (I, §3, Proposition 13). Setze $T' := \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Nach I, §4, Lemma 4 gilt

$$K^n = \langle \{b_k \mid k \in T'\} \rangle \oplus \langle \{b_k \mid k \in T\} \rangle$$

Es ist $\langle \{b_k \mid k \in T'\} \rangle = R(A)$ und $\langle \{b_k \mid k \in T\} \rangle = \langle \{e_k \mid k \in T\} \rangle$. $\square$

Korollar 3. Sei $A \in M(m \times n, K)$ mit $A \neq 0$. Sei $A' \in M(m \times n, K)$ eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A' durch endlich viele elementare Zeilenumformungen hervorgeht (§1, Satz 3). Dann ist $A' \neq 0$ und es gilt

(i) Die von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A' bilden eine Basis von $R(A)$.
(ii) $\mathrm{rk}(A)$ stimmt überein mit der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A'.
(iii) Sei r die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilenvektoren von A', seien $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die Stufenindizes von A' und setze $T := \{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n. Dann ist $\langle \{e_t \mid t \in T\} \rangle$ ein lineares Komplement von $R(A)$ in K^n.

Beweis. Nach Lemma 1 gilt $R(A) = R(A')$ und $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A')$. Insbesondere ist $A' \neq 0$. Wende Lemma 2 auf A' an. $\square$

§3 Invertieren einer Matrix

Definition 1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Wir definieren einige $(n \times n)$-Matrizen über K (die Koeffizienten, die nicht aufgeführt und nicht durch Pünktchen angedeutet sind, sind gleich Null)

(I) Für $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ setze

$$P(i,j)_n := \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & \text{i−te Spalte} & & & & \text{j−te Spalte} & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & | & & & & | & & & \\
 & \ddots & & | & & & & | & & & \\
 & & 1 & | & & & & | & & & \\
 & & & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
 & & & | & 1 & & & | & & & \\
 & & & | & & \ddots & & | & & & \\
 & & & | & & & 1 & | & & & \\
 & & & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i−te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{j−te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

(N.B. Es gilt $P(i,j)_n = P(j,i)_n$).

(II) Für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\lambda \in K - \{0\}$ setze

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \scriptstyle \text{i−te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & \\
M(\lambda, i)_n := & \begin{pmatrix}
1 & & & | & & & & & \\
 & \ddots & & | & & & & & \\
 & & 1 & | & & & & & \\
 & & & \lambda & - & - & - & - & - \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \scriptstyle \text{i−te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

(III) Für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$ setze

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} \scriptstyle \text{j−te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & \\
A(\lambda, i, j)_n := & \begin{pmatrix}
1 & & & & & | & & \\
 & \ddots & & & & | & & \\
 & & \ddots & & & \lambda & - & - \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \scriptstyle \text{i−te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Die Matrizen $P(i, j)_n$, $M(\lambda, i)_n$, $A(\lambda, i, j)_n$ heißen *Elementarmatrizen*.

Lemma 2. Sei $A \in M(m \times n, K)$. Wir führen an A die elementaren Zeilen und Spaltenumformungen aus

(I) Sei A_I die Matrix, die aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile entsteht ($i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$).

(II) Sei A_{II} die Matrix, die aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in K - \{0\}$ ensteht ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$).

(III) Sei A_{III} die Matrix, die aus A durch Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile ensteht ($i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$).

(I′) Sei $A_{I'}$ die Matrix, die aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Spalte entsteht ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$).

(II′) Sei $A_{II'}$ die Matrix, die aus A durch Multiplikation der i-ten Spalte mit $\lambda \in K - \{0\}$ ensteht ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

(III′) Sei $A_{III'}$ die Matrix, die aus A durch Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte ensteht ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$).

Es gilt

$$A_I = P(i,j)_m \cdot A \text{ und } A_{I'} = A \cdot P(i,j)_n$$

$$A_{II} = M(\lambda,i)_m \cdot A \text{ und } A_{II'} = A \cdot M(\lambda,i)_n$$

$$A_{III} = A(\lambda,j,i)_m \cdot A \text{ und } A_{III'} = A \cdot A(\lambda,i,j)_n$$

Beweis. Nachrechnen

Proposition 3. (Test auf Invertierbarkeit und Invertieren einer Matrix)
Sei $A \in M(n \times n, K)$. Sei $A' \in M(n \times n, K)$ eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgeht (§1, Satz 3). An A' können wir $\mathrm{rk}(A)$ ablesen (§2, Korollar 3). A ist invertierbar genau dann, wenn $\mathrm{rk}(A) = n$ (II, §4, Proposition 5).
Wir nehmen nun an, daß $\mathrm{rk}(A) = n$. Dann kann A' durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n transformiert werden. Seien $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ die elementaren Zeilenumformungen, die durchgeführt wurden, um von A über A' zu E_n zu gelangen. Wir wenden $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ auf E_n an. Die dabei entstehende Matrix ist A^{-1}.

Beweis. Sei r die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen von A' und seien $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$ die Stufenindizes von A'. Wir nehmen an, daß $\mathrm{rk}(A) = n$. Dann ist $r = n$ und somit $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$. Also haben wir

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & & & \\ & a'_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $a'_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Dann kann A' durch elementare Zeilenumformungen in E_n überführt werden.
Gemäß Lemma 2 ist eine elementare Zeilenumformung eine Multiplikation mit einer Elementarmatrix von links. Also gibt es Elementarmatrizen $B_1, B_2, \ldots, B_\ell \in M(n \times n, K)$ mit

$$E_n = B_\ell \cdot (\ldots \cdot (B_2 \cdot (B_1 \cdot A)) \ldots)$$

Mit der Assoziativität der Matrizenmultiplikation erhalten wir

$$E_n = (B_\ell \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1) \cdot A$$

Multiplikation dieser Gleichung mit A^{-1} ergibt

$$A^{-1} = (B_\ell \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1) \cdot E_n$$

also

$$A^{-1} = B_\ell \cdot (\ldots \cdot (B_2 \cdot (B_1 \cdot E_n)) \ldots)$$

Wieder mit Lemma 2 erhalten wir, daß A^{-1} durch Anwenden der elementaren Zeilenumformungen $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ auf E_n entsteht. $\square$

Beispiel. Wir wenden Proposition 3 auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ an.

$$\begin{array}{rll} A = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \end{array}$$

§4 Lineare Gleichungssysteme

Ein *lineares Gleichungssystem* über einem Körper K in den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestehend aus m Gleichungen ist ein System von Gleichungen

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

mit $a_{ij}, b_k \in K$. Gesucht ist die Menge aller $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$, die die Gleichungen in $(*)$ erfüllen. Die Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M(m\times n, K)$ heißt die *Koeffizientenmatrix* von $(*)$. Für das Gleichungssystem $(*)$ schreiben wir $E((a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}, (b_1, \ldots, b_m))$. Die *Lösungsmenge* von $(*)$, d.h. die Menge

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \text{ genügt den Gleichungen von } (*)\}$$

wird mit $S((a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}, (b_1, \ldots, b_m))$ bezeichnet. Das Gleichungssystem $(*)$ heißt *homogen*, wenn $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

heißt das zu $(*)$ *assoziierte* homogene lineare Gleichungssystem.

Proposition 1. Sei $E(A, (b_1, \ldots, b_m))$ mit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M(m \times n, K)$ ein lineares Gleichungssystem über einem Körper K in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen. Sei $E(A, (0, \ldots, 0))$ das dazu assoziierte homogene lineare Gleichungssystem. Für die Lösungsmengen gelten

(i) $S(A, (0, \ldots, 0))$ ist ein Untervektorraum von K^n. Es gilt $\dim S(A, (0, \ldots, 0)) = n - \mathrm{rk}(A)$.

(ii) $S(A, (b_1, \ldots, b_m))$ ist entweder die leere Menge oder eine Nebenklasse des Untervektorraums $S(A, (0, \ldots, 0))$ von K^n. Ist also $S(A, (b_1, \ldots, b_m)) \neq \emptyset$ und $z \in S(A, (b_1, \ldots, b_m))$, so gilt $S(A, (b_1, \ldots, b_m)) = z + S(A, (0, \ldots, 0))$.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : K^n \to K^m,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j)$$

Also f ist die lineare Abbildung $L_{A,\mathcal{A},\mathcal{B}} : K^n \to K^m$ zu der Matrix A und den Standardbasen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von K^n und K^m. Es gilt

$$S(A, (0, \ldots, 0)) = \ker(f)$$

$$S(A, (b_1, \ldots, b_m)) = f^{-1}((b_1, \ldots, b_m))$$

(i) Es gilt $\dim S(A, (0, \ldots, 0)) = n - \mathrm{rk}(f) = n - \mathrm{rk}(A)$, wobei die erste Gleichung nach II, §1, Satz 15 (Dimensionsformel für die lineare Abbildungen) und die zweite Gleichung nach II, §4, Proposition 4 gilt.
(ii) folgt aus II, §1, Lemma 6. □

Zur Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems:
Wir gehen aus von einem linearen Gleichungssystem $E(A, (b_1, \ldots, b_m))$ mit $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M(m\times n, K)$, also ein lineares Gleichungssystem über einem Körper K in n Unbestimmten bestehend aus m Gleichungen.Wir nehmen an $A \neq 0$. Wir wollen die Lösungsmenge $S(A, (b_1, \ldots, b_m)) \subseteq K^n$ untersuchen.

(I) Sind $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ elementare Zeilenumformungen und ergeben $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ angewandt auf A die Matrix $A' = (a'_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} \in M(m \times n, K)$ und angewandt auf die Matrix $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ die Matrix $\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}$, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem $E(A', (b'_1, \ldots, b'_m))$ und es gilt

$$S(A, (b_1 \ldots, b_m)) = S(A', (b'_1, \ldots, b'_m))$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß $\ell = 1$. Die Zeilenumformung u_1 ist vom Typ I, II oder III aus §1, Definition 1. Für jeden dieser drei Fälle läßt sich die Behauptung leicht verifizieren. □

(II) Seien nun $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ so gewählt, daß A' von Zeilenstufenform ist (§1, Satz 3). Wir haben die linearen Gleichungssysteme $E(A, (b_1, \ldots, b_m))$, $E(A', (b'_1, \ldots, b'_m))$ und die assoziierten homogenen linearen Gleichungssysteme $E(A, (0, \ldots, 0)), E(A', (0, \ldots, 0))$. Nach (I) gilt

$$S(A, (b_1 \ldots, b_m)) = S(A', (b'_1, \ldots, b'_m))$$
$$S(A, (0 \ldots, 0)) = S(A', (0, \ldots, 0))$$

Deshalb werden wir im folgenden mit den Gleichungssystemen $E(A', (b'_1 \ldots, b'_m))$ und $E(A', (0, \ldots, 0))$ arbeiten.

Sei $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen von A' (N.B. r ist der Rang von A und A' (nach §2, Korollar 3)). Seien $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$

die Stufenindizes von A'. Also

$$A' = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \dots & 0 & a'_{1j_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & & & & & & & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{r-1,j_{r-1}} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{rj_r} & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0
\end{array}\right)$$

Wir setzen $T := \{1, 2, \dots, n\} - \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$.
Der Rechenaufwand in den nachfolgenden Punkten minimiert sich (genauer: = Null), wenn A' so gewählt ist, daß für jedes $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ gilt $a'_{k,j_k} = 1$ und $a'_{i,j_k} = 0$ für alle $i < k$ ("Matrix von spezieller Zeilenstufenform"). Dies wird hier aber nicht vorausgesetzt.

(III) Es ist $S(A', (b'_1, \dots, b'_m)) \neq \emptyset$ genau dann, wenn für jedes i mit $r + 1 \leq i \leq m$ gilt $b'_i = 0$.

Beweis. Für jedes i mit $r + 1 \leq i \leq m$ lautet die i-te Gleichung des Gleichungssystems $E(A', (b'_1, \dots, b'_m))$

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b'_i$$

und somit ist $0 = b'_i$, wenn $S(A', (b'_1, \dots, b'_m)) \neq \emptyset$. Im nachfolgenden Punkt (IV) werden wir zeigen, daß $S(A', (b'_1, \dots, b'_m)) \neq \emptyset$, wenn für jedes i mit $r + 1 \leq i \leq m$ gilt $b'_i = 0$.

Ab jetzt nehmen wir an, daß $b'_i = 0$ für alle i mit $r + 1 \leq i \leq m$.

(IV) Ist für jedes $i \in T$ ein $x_i \in K$ gegeben, so gibt es eindeutig bestimmte $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r} \in K$, so daß $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S(A', (b'_1, \dots, b'_m))$.

Beweis. Die Definition von $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ erfolgt in der Reihenfolge $x_{j_r}, x_{j_{r-1}}, \dots, x_{j_1}$.

- Da $a'_{rj_r} \neq 0$, gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_{j_r} \in K$, so daß $x_{j_r}, x_{j_r+1}, \dots, x_n$ die r-te Gleichung von $E(A', (b'_1, \dots, b'_m))$ erfüllen.
- Da $a'_{r-1,j_{r-1}} \neq 0$, gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_{j_{r-1}} \in K$, so daß $x_{j_{r-1}}, x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n$ die $(r-1)$-te Gleichung von $E(A', (b'_1, \dots, b'_m))$ erfüllen.

  $\vdots$
- Da $a'_{1j_1} \neq 0$, gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_{j_1} \in K$, so daß $x_{j_1}, x_{j_1+1}, \dots, x_n$ die 1-te Gleichung von $E(A', (b'_1, \dots, b'_m))$ erfüllen.

Die i-te Gleichung von $E(A', (b'_1, \dots, b'_m))$ für $r + 1 \leq i \leq m$ ist erfüllt, da $b'_i = 0$. □

(V) Für jedes $i \in T$ setze $x_i := 0 \in K$. Nach (IV) gibt es eindeutig bestimmte $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r} \in K$, so daß $z := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S(A', (b'_1, \dots, b'_m))$. Dadurch ist ein Element von $S(A', (b'_1, \dots, b'_m)) = S(A, (b_1, \dots, b_m))$ bestimmt.

(VI) Es ist $r \leq n$. Es ist $r = n$ genau dann, wenn $|S(A', (b'_1, \dots, b'_m))| = 1$ (und das Element von $S(A', (b'_1, \dots, b'_m))$ wurde in (V) bestimmt).

1.Beweis. Da $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$, folgt $r \leq n$. Es ist $r = n$ genau dann, wenn $T = \emptyset$ (und es ist dann $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$). Nach (IV) ist das letztere genau dann erfüllt, wenn $|S(A', (b'_1, \ldots, b'_m))| = 1$.

2. Beweis. Proposition 1. Beachte, daß r der Rang von A' ist. $\square$

Ab jetzt nehmen wir an, daß $r < n$. Beachte, daß $|T| = n - r$.

(VII) Nach der Aussage von (IV) (angewandt auf das lineare Gleichungssystem $E(A', (0, \ldots, 0))$) gibt es zu jedem $(a_i | i \in T) \in K^{n-r}$ eindeutig bestimmte $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r} \in K$, so daß $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S(A', (0, \ldots, 0))$. Damit erhalten wir die Abbildung

$$f : K^{n-r} \to S(A', (0, \ldots, 0)),\ (a_i | i \in T) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Nach Proposition 1 (i) ist $S(A', (0, \ldots, 0))$ ein Untervektorraum von K^n. Es gilt: f ist ein Isomorphismus.

Beweis. Für die Abbildung

$$g : S(A', (0, \ldots, 0)) \to K^{n-r},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_i | i \in T)$$

gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ (aufgrund der Eindeutigkeit von $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}$) und $g \circ f = \mathrm{id}$. Also sind f und g bijektiv und $f = g^{-1}$. Da g linear ist, folgt, daß f linear ist (II, §1, Lemma 3 (iv)). $\square$

(VIII) Aus (VII) (und II, §1, Proposition 8 (iv)) folgt, daß für jede Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_{n-r})$ von K^{n-r} das Tupel $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{n-r}))$ eine Basis von $S(A', (0, \ldots, 0))$ ist. Wenden wir dies insbesondere auf die Standardbasis von K^{n-r} an, so erhalten wir eine Basis $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-r})$ von $S(A', (0, \ldots, 0)) = S(A, (0, \ldots, 0))$.

(IX) Mit dem Element z von $S(A, (b_1, \ldots, b_m))$ aus (V) und der Basis $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-r})$ von $S(A, (0, \ldots, 0))$ aus (VIII) erhalten wir nach Proposition 1 (ii) die folgende Beschreibung von $S(A, (b_1, \ldots, b_m))$

$$\begin{aligned} S(A, (b_1, \ldots, b_m)) &= z + \langle z_1, \ldots, z_{n-r} \rangle \\ &= \{ z + \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_{n-r} z_{n-r} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K \} \end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Q}$

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \\ -2x_3 + 4x_4 &=& 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &=& -2 \end{array} \right.$$

bestimmen. Dies geschieht in 5 Schritten.

(1) Transformation der Koeffizientenmatrix von $(*)$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in (spezieller) Zeilenstufenform (cf. (I), (II)):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Addition von Zeile 1 zu Zeile 3 und Addition von Zeile 2 zu Zeile 3 ergeben

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Zeile 2 mit $-\frac{1}{2}$ und anschließende Subtraktion von Zeile 2 von Zeile 1 ergeben

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =: b'$$

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem zu A' und b'

$$(*)' \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 1 \\ \qquad\quad x_3 - 2x_4 &= -1 \end{cases}$$

Die beiden Gleichungssysteme $(*)$ und $(*)'$ haben dieselbe Lösungsmenge.

(2) Das lineare Gleichungsystem $(*)'$ hat eine Lösung, da für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt: Ist die i-te Zeile von A' gleich Null, so ist auch die i-te Zeile von b' gleich Null. (cf. (III)).

(3) Bestimmung einer Lösung von $(*)'$ (cf. (V)):
Da $j_1 = 1$ und $j_2 = 3$ die Stufenindizes von A' sind, sind x_2 und x_4 frei wählbar (cf. (IV)). Wir wählen $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$, und berechnen $x_3 = -1$ und $x_1 = 1$. Also ist $(1, 0, -1, 0)$ eine Lösung von $(*)'$ und damit auch von $(*)$.

(4) Bestimmung einer Basis der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(*)'_h$ assoziiert zu $(*)'$ (cf. (VIII)):

$$(*)'_h \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ \qquad\quad x_3 - 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

x_2 und x_4 sind frei wählbar (cf. (VII)). Wir wählen $x_2 = 1$ und $x_4 = 0$, und berechnen $x_3 = 0$ und $x_1 = -2$ und erhalten $(-2, 1, 0, 0)$. Wir wählen $x_2 = 0$ und $x_4 = 1$, und berechnen $x_3 = 2$ und $x_1 = -3$ und erhalten $(-3, 0, 2, 1)$. Also ist $((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 2, 1))$ eine Basis der Lösungsmenge von $(*)'_h$, die mit der Lösungsmenge des zu $(*)$ assoziierten homogenen linearen Gleichungssystems übereinstimmt.

(5) Die Lösungsmenge $S((*))$ von $(*)$ ist (cf. (IX))

$$\begin{aligned} S((*)) &= (1, 0, -1, 0) + \langle(-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 2, 1)\rangle \\ &= \{(1, 0, -1, 0) + \lambda_1(-2, 1, 0, 0) + \lambda_2(-3, 0, 2, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

IV Determinante

§1 Permutationen

Definition 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller bijektiven Abbildungen $\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ wird mit S_n bezeichnet. Für $\sigma, \tau \in S_n$ setze

$$\sigma \cdot \tau := \sigma \circ \tau \in S_n$$

mit $\sigma \circ \tau$ die Komposition der beiden Abbildungen σ und τ. Das Paar $(S_n, \cdot)$ ist eine Gruppe. Sie heißt die *symmetrische Gruppe* der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, die Elemente von S_n heißen die *Permutationen* der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$. Das neutrale Element der Gruppe $(S_n, \cdot)$ ist die Identität id der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ und das Inverse zu einem $\sigma \in S_n$ in der Gruppe $(S_n, \cdot)$ ist die Umkehrabbildung σ^{-1}. (Die Gruppe $(S_n, \cdot)$ wurde schon in I, §1 betrachtet).

Definition 2. Ein $\sigma \in S_n$ heißt *Transposition*, wenn es $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $a \neq b$ gibt, so daß σ die Elemente a, b vertauscht und alle anderen Elemente von $\{1, 2, \dots, n\}$ fest läßt, d.h. $\sigma(a) = b$ und $\sigma(b) = a$ und $\sigma(k) = k$ für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\} - \{a, b\}$. Schreibe dafür $\sigma = (a\ b)$. Eine Transposition $(a\ b)$ heißt *speziell*, wenn die natürlichen Zahlen a, b benachbart sind, d.h. $|a - b| = 1$.

Für jede Transposition $\sigma \in S_n$ gilt $\sigma \cdot \sigma = \mathrm{id}$, also $\sigma^{-1} = \sigma$.

Proposition 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
- (i) Jede Transposition $(a\ b) \in S_n$ ist ein Produkt von $2r - 1$ speziellen Transpositionen mit $r := |a - b| \in \mathbb{N}$.
- (ii) Jedes Element von S_n ist ein Produkt spezieller Transpositionen.

Beweis. (i) Wir führen Induktion nach $r \in \mathbb{N}$.
$r = 1$: Dann ist $(a\ b)$ eine spezielle Transposition und wir sind fertig.
$r \to r + 1$: Sei $(a\ b) \in S_n$ mit $|a - b| = r + 1 (\geq 2)$. Wir dürfen annehmen, daß $a < b$ und damit $a \leq b - 2$. Betrachte $a < c := a + 1 < b$. Es gilt $(a\ b) = (a\ c)(c\ b)(a\ c)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(c\ b)$ ein Produkt von $2r - 1$ speziellen Transpositionen. Dann ist $(a\ b)$ ein Produkt von $(2r - 1) + 2 = 2(r + 1) - 1$ speziellen Transpositionen.
(ii) Nach (i) genügt es zu zeigen, daß jedes Element von S_n ein Produkt von Transpositionen ist. Dies zeigen wir durch Induktion nach n.
$n = 2$: Es ist $S_2 = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ mit σ eine Transposition und $\mathrm{id} = \sigma \cdot \sigma$.
$n \to n + 1$: Setze

$$S'_{n+1} := \{\sigma \in S_{n+1} \mid \sigma(n + 1) = n + 1\} \subseteq S_{n+1}$$

Wir haben die Abbildungen

$$S'_{n+1} \to S_n, \sigma \mapsto \overline{\sigma}$$
$$S_n \to S'_{n+1}, \tau \mapsto \tilde{\tau}$$

wobei $\overline{\sigma} := \sigma | \{1, 2, \dots, n\}$ und $\tilde{\tau} : \{1, 2, \dots, n+1\} \to \{1, 2, \dots, n+1\}$ die Abbildung ist mit $\tilde{\tau}(x) = \tau(x)$ für jedes $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\tilde{\tau}(n + 1) = n + 1$.
Ist $\sigma \in S'_{n+1}$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m \in S_n$ mit $\overline{\sigma} = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_m$, woraus sich ergibt $\sigma = (\overline{\sigma})^\sim = (\tau_1)^\sim \cdot (\tau_2)^\sim \cdot \ldots \cdot (\tau_m)^\sim$

und $(\tau_1)^\sim, (\tau_2)^\sim, \dots, (\tau_m)^\sim \in S_{n+1}$ sind Tranpositionen. Also ist jedes $\sigma \in S'_{n+1}$ ein Produkt von Transpositionen.
Sei nun $\sigma \in S_{n+1} - S'_{n+1}$. Dann ist $\sigma(n+1) \neq n+1$. Sei $\tau \in S_{n+1}$ die Transposition, die $n+1$ und $\sigma(n+1)$ vertauscht. Dann ist $\tau \cdot \sigma \in S'_{n+1}$ und wie eben gezeigt, gibt es Transpositionen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \in S_{n+1}$ mit

$$\tau \cdot \sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m,$$

woraus sich ergibt $\sigma = \tau \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m$. Damit ist gezeigt, daß σ ein Produkt von Transpositionen ist. □

Definition 4. Für jedes $\sigma \in S_n$ definiert man das *Signum* von σ, bezeichnet mit $\mathrm{sign}(\sigma)$, durch

$$\mathrm{sign}(\sigma) := (-1)^{t_\sigma} \in \{1, -1\}$$

wobei

$$t_\sigma := |\{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \mid i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}| \in \mathbb{N}_0$$

Ein Paar (i,j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt *Fehlstand* von σ.

Proposition 5.
(i) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\mathrm{sign}(\tau\sigma) = \mathrm{sign}(\tau) \cdot \mathrm{sign}(\sigma)$.
(ii) Es ist $\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = 1$.
(iii) Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$.
(iv) Für jede Transposition $\sigma \in S_n$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

Beweis. (i) Setze

$$\begin{array}{rcl} M_1 : & = & \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma(i) < \sigma(j) \text{ und } \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ M_2 : & = & \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j) \text{ und } \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\} \\ M_3 : & = & \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j) \text{ und } \tau(\sigma(i)) < \tau(\sigma(j))\} \end{array}$$

Dann gelten
(1) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_1 \cup M_2 = \{(i,j) | i < j \text{ und } \tau(\sigma(i)) > \tau(\sigma(j))\}$
(2) $M_2 \cap M_3 = \emptyset$ und $M_2 \cup M_3 := \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}$
(3) Setzen wir

$$\begin{array}{rcl} M'_1 : & = & \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \text{ und } \tau(i) > \tau(j)\} \\ M'_3 : & = & \{(i,j) | i < j \text{ und } \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \text{ und } \tau(i) > \tau(j)\} \end{array}$$

so ist $M'_1 \cap M'_3 = \emptyset$ und $M'_1 \cup M'_3 = \{(i,j) | i < j \text{ und } \tau(i) > \tau(j)\}$ und gibt es bijektive Abbildungen $M_1 \xrightarrow{\sim} M'_1$ und $M_3 \xrightarrow{\sim} M'_3$.
(Zur Existenz der bijektiven Abbildungen: Wir haben die Abbildungen

$$\begin{array}{lcl} f_1 : M_1 \longrightarrow M'_1 & , & (i,j) \longmapsto (\sigma(i), \sigma(j)) \\ f_3 : M_3 \longrightarrow M'_3 & , & (i,j) \longmapsto (\sigma(j), \sigma(i)) \end{array}$$

und die Abbildungen

$$\begin{array}{lcl} g_1 : M'_1 \longrightarrow M_1 & , & (i,j) \longmapsto (\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)) \\ g_3 : M'_3 \longrightarrow M_3 & , & (i,j) \longmapsto (\sigma^{-1}(j), \sigma^{-1}(i)) \end{array}$$

Es ist $f_1 \circ g_1 = \mathrm{id}$, $g_1 \circ f_1 = \mathrm{id}$ und $f_3 \circ g_3 = \mathrm{id}$, $g_3 \circ f_3 = \mathrm{id}$. Also sind f_1 und f_3 bijektiv).

Aus (1),(2),(3) folgt

(1′) $t_{\tau\sigma} = |M_1| + |M_2|$
(2′) $t_\sigma = |M_2| + |M_3|$
(3′) $t_\tau = |M_1'| + |M_3'| = |M_1| + |M_3|$
Also
$$t_{\tau\sigma} = t_\tau + t_\sigma - 2 \cdot |M_3|$$
und somit $\mathrm{sign}(\tau\sigma) = (-1)^{t_{\tau\sigma}} = (-1)^{t_\tau}(-1)^{t_\sigma} = \mathrm{sign}(\tau)\mathrm{sign}(\sigma)$.
(ii) Es ist $t_{\mathrm{id}} = 0$ und somit $\mathrm{sign}(\mathrm{id}) = (-1)^{t_{\mathrm{id}}} = (-1)^0 = 1$.
(iii) Nach (i) und (ii) gilt $1 = \mathrm{sign}(\mathrm{id}) = \mathrm{sign}(\sigma^{-1}\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma^{-1})\mathrm{sign}(\sigma)$, woraus folgt $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$.
(iv) Ist σ eine spezielle Transposition $\sigma = (a\ b)$ (mit $a < b$), so hat σ genau einen Fehlstand, nämlich (a, b), und somit ist $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{t_\sigma} = (-1)^1 = -1$.
Ist σ eine Transposition, so gilt $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$ mit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ spezielle Transpositionen und n von der Form $2r - 1$ (Proposition 3 (i)) und somit gilt nach (i) $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma_1) \cdot \mathrm{sign}(\sigma_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sign}(\sigma_n) = (-1)^n = -1$. □

§2 Matrizen über Ringen

Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$-*Matrix* über R ist eine Abbildung $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to R$. Ist $a_{ij} \in R$ das Bild von $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ unter A, so schreibt man statt A auch $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}}$. $M(m \times n, R)$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$-Matrizen über R.

Verknüpfungen (analog zu II, §2)

- Für $A, B \in M(m \times n, R)$ hat man $A + B \in M(m \times n, R)$.
- Für $\lambda \in R$ und $A \in M(m \times n, R)$ hat man $\lambda \cdot A \in M(m \times n, R)$.
- Für $A \in M(m \times n, R)$ und $B \in M(n \times \ell, R)$ hat man $A \cdot B \in M(m \times \ell, R)$.

Alle Aussagen und Definitionen in II, §2 nach Proposition 1 gelten analog für $M(m \times n, R)$ statt $M(m \times n, K)$.
Insbesondere haben wir: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Tripel $(M(n \times n, R), +, \cdot)$ (mit $\cdot$ die Multiplikation) ein Ring mit Einselement. Das Einselement ist die Matrix E_n mit
$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n, R)$$
Die Einheiten dieses Rings heißen die invertierbaren $n \times n$-Matrizen über R. Also eine Matrix $A \in M(n \times n, R)$ ist invertierbar genau dann, wenn es ein $B \in M(n \times n, R)$ mit $A \cdot B = E_n = B \cdot A$ gibt. B ist eindeutig durch A bestimmt. Man setzt $A^{-1} := B$. Die Menge aller invertierbaren Matrizen von $M(n \times n, R)$ wird mit $\mathrm{GL}(n, R)$ bezeichnet.

§3 Existenz und Eindeutigkeit der Determinante und einige Eigenschaften der Determinante

Für den gesamten Paragraph seien ein kommutativer Ring R mit Einselement und ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Für $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^n$ bezeichnet

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

die $n \times n$-Matrix über R, deren i-ter Zeilenvektor gerade a_i ist (für $i = 1, 2, \ldots, n$).

Definition 1. Eine *Determinante* auf $M(n \times n, R)$ ist eine Abbildung

$$\det : M(n \times n, R) \to R,\ A \mapsto \det A$$

für die gilt

(I) det ist multilinear in den Zeilen, d.h. für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und alle $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in R^n$ ist die Abbildung

$$R^n \to R,\ x \mapsto \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

linear, d.h. für alle $x, y \in R^n$ und $\lambda \in R$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x+y \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ y \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \lambda x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(II) det ist alternierend in den Zeilen, d.h. ist $A \in M(n \times n, R)$ eine Matrix, so daß zwei benachbarte Zeilen von A übereinstimmen, so gilt $\det A = 0$. Genauer: Sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^n$ und gibt es ein i mit $1 \leq i \leq n-1$ und $a_i = a_{i+1}$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

(III) $\det E_n = 1$.

Beispiel 2. Wir betrachten den Fall $n = 1$. Es gibt genau eine Determinante auf $M(1 \times 1, R)$, und diese ist die Abbildung $\det : M(1 \times 1, R) \to R, (a) \mapsto a$.

Beweis. Die angegebene Abbildung hat die Eigenschaften (I),(II),(III) aus Definition 1 und ist somit eine Determinante auf $M(1 \times 1, R)$.
Ist $f : M(1 \times 1, R) \to R$ eine Determinante auf $M(1 \times 1, R)$, so gilt $f((a)) = f((a \cdot 1)) = a \cdot f((1))$ (nach (I)) und $f((1)) = 1$ (nach (III)) und somit $f((a)) = a$, also $f = \det$. $\square$

Satz 3. Sei $\det : M(n \times n, R) \to R$ eine Abbildung, die multilinear und alternierend in den Zeilen ist, d.h. die (I) und (II) in Definition 1 erfüllt. Dann gelten

(i) Ist $A \in M(n \times n, R)$ und ensteht $A' \in M(n \times n, R)$ aus A durch Anwenden einer Permutation $\sigma \in S_n$ auf die Zeilen von A, so gilt $\det A' = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det A$. Genauer: Sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^n$ und $\sigma \in S_n$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ a_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(ii) Ist $A \in M(n \times n, R)$, so daß zwei Zeilen von A übereinstimmen, so gilt $\det A = 0$. Genauer: Sind $a_1, a_2, \dots, a_n \in R^n$ und gibt es $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $a_i = a_j$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

(iii) Sei $A \in M(n \times n, R)$. Wir wenden auf A die elementaren Zeilenumformungen an:
  (I) Entsteht $A' \in M(n \times n, R)$ aus A durch Vertauschen zweier Zeilen von A, so ist $\det A' = -\det A$.
  (II) Entsteht $A' \in M(n \times n, R)$ aus A durch Multiplikation einer Zeile von A mit $\lambda \in R$, so ist $\det A' = \lambda \cdot \det A$.
  (III) Entsteht $A' \in M(n \times n, R)$ aus A durch Addition des λ-fachen (mit $\lambda \in R$) einer Zeilen von A zu einer anderen Zeile von A, so ist $\det A' = \det A$.

Beweis. (i) Zunächst zeigen wir

($*$) Ist $A \in M(n \times n, R)$ und entsteht $A' \in M(n \times n, R)$ durch Vertauschen zweier benachbarter Zeilen von A, so gilt $\det A' = -\det A$.

Denn: Seien ein i mit $1 \leq i \leq n-1$ und $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+2}, \ldots, a_n \in R^n$ gegeben. Für $x, y \in R^n$ setze

$$f(x,y) := \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ x \\ y \\ a_{i+2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Wir haben zu zeigen $f(x,y) = -f(y,x)$. Dazu: Nach Definition 1 (I) gilt $f(x+y, x+y) = f(x, x+y) + f(y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y)$. Nach Definition 1 (II) gilt $f(x+y, x+y) = f(x,x) = f(y,y) = 0$. Dann folgt $f(x,y) = -f(y,x)$. Damit ist ($*$) bewiesen.

Nach §1, Proposition 3 können wir für das σ in (i) schreiben $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_m \in S_n$ spezielle Transpositionen. Nach ($*$) erhalten wir

$$(**) \qquad \det \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ a_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = (-1)^m \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Nach §1, Proposition 5 gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma_1) \cdot \mathrm{sign}(\sigma_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sign}(\sigma_m)$ und $\mathrm{sign}(\sigma_1) = \mathrm{sign}(\sigma_2) = \ldots = \mathrm{sign}(\sigma_m) = -1$, also $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^m$. Mit ($**$) folgt die Behauptung von (i).

(iii)(I) Für jede Transposition $\sigma \in S_n$ gilt $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ (§1, Proposition 5). Deshalb erhalten wir (iii)(I), indem wir (i) anwenden mit σ eine Transposition.

(ii) Sei $A \in M(n \times n, R)$ und es gebe $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so daß $i \neq j$ und die i-te und j-te Zeile von A übereinstimmen. Sind i, j benachbart (d.h. $|i-j| = 1$), so gilt $\det A = 0$ nach Definition 1 (II). Seien nun i, j nicht benachbart. Wir dürfen annehmen, daß $i < j$. Sei $A' \in M(n \times n, R)$ die Matrix, die aus A durch Vertauschung der i-ten und $(j-1)$-ten Zeile von A entsteht. Nach der schon bewiesenen Aussage (iii)(I) gilt $\det A' = -\det A$. Die $(j-1)$-te und j-te Zeile von A' stimmen überein. Deshalb $\det A' = 0$. Dann folgt $\det A = 0$.

(iii)(II) gilt nach Definition 1 (I).

(iii)(III) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^n, \lambda \in R$ und $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

wobei die erste und zweite Gleichung nach Definition 1 (I) und die letzte Gleichung nach (ii) gelten. □

Satz 4. (Eindeutigkeit der Determinante und Leibnizformel)
Ist $\det : M(n \times n, R) \to R$ eine Determinante auf $M(n \times n, R)$, so gilt für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Diese Formel heißt Leibnizformel.
Als Folgerung erhalten wir, daß es höchstens eine Determinante auf $M(n \times n, R)$ gibt.

Beweis. Zunächst zeigen wir

($*$) Sei $\det : M(n \times n, R) \to R$ eine Abbildung, die multilinear und alternierend in den Zeilen ist, d.h. die (I) und (II) in Definition 1 erfüllt. Sei $(a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ und seien $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R^n$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ haben wir das Element $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \in R^n$. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} b_j \end{pmatrix} = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \Big) \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Beweis von ($*$).
Wir setzen $L := \{1, 2, \ldots, n\}$. Aufgrund der Multilinearität von det (Definition 1 (I)) haben wir

$$(1) \qquad \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} b_j \end{pmatrix} = \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in L^n} \Big(a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} \Big)$$

Nach Satz 3 (ii) gilt

$$(2) \qquad \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in L^n} \Big(a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} \Big) =$$

$$\sum_{\substack{(j_1, \ldots, j_n) \in L^n, \\ j_k \neq j_\ell \text{ für } k \neq \ell}} \Big(a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} \Big) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \Big(a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \Big)$$

Nach Satz 3 (i) gilt

(3) $$\sum_{\sigma\in S_n}\big(a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\cdot\det\begin{pmatrix} b_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ b_{\sigma(n)}\end{pmatrix}\big)=$$

$$\sum_{\sigma\in S_n}\big(a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\cdot\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\det\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\big)=$$

$$\big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\big)\cdot\det\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Aus (1),(2),(3) folgt $(*)$.

Wie im Fall eines Körpers definieren wir auch für unseren Ring R die Elemente $e_i := (0,\ldots,0,1,0\ldots,0)\in R^n$. Sei $A=(a_{ij})\in M(n\times n,R)$. Der i-te Zeilenvektor von A ist $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})=\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\in R^n$. Sei $\det : M(n\times n,R)\to R$ weiterhin wie in $(*)$. Nach $(*)$ gilt

$$\det A=\det\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}e_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{nj}e_j\end{pmatrix}=$$

$$\big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\big)\cdot\ \det\begin{pmatrix} e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=$$

$$\big(\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}\big)\cdot\ \det E_n$$

Ist nun $\det : M(n\times n,R)\to R$ eine Determinante, so ist $\det E_n=1$ nach Forderung (III) in Definition 1, und somit folgt $\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$. □

Satz 5. (Existenz der Determinante und Laplace-Entwicklung nach Spalten)

(i) Es gibt eine Determinante auf $M(n\times n,R)$,

$$\det{}_n : M(n\times n,R)\to R$$

(N.B. Nach Satz 4 ist $\det_n$ eindeutig).

(ii) Sei $n\geq 2$ und sei $A=(a_{ij})\in M(n\times n,R)$. Für jedes $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$ sei $A_{ij}\in M((n-1)\times(n-1),R)$ die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht. Dann gilt für jedes $j\in\{1,2,\ldots,n\}$

$$\det{}_n A=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\det{}_{n-1}A_{ij}$$

Diese Formel nennt man die Entwicklung von $\det_n A$ nach der j-ten Spalte.

Beweis. (i) Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n.
Für $n = 1$ gilt die Behauptung nach Beispiel 2.
$(n-1) \to n \, (n \geq 2)$: Wir nehmen an, daß eine Determinante $\det_{n-1} : M((n-1)\times(n-1)) \to R$ existiert und zeigen, daß es eine Determinante auf $M(n\times n, R)$ gibt. Wir wählen ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und definieren eine Abbildung $\det_n : M(n \times n, R) \to R$, indem wir für jedes $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ setzen

$$(*) \qquad \det_n A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot \det_{n-1} A_{ik}$$

wobei $A_{ik} \in M((n-1) \times (n-1), R)$ die Matrix ist, die durch Streichen der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von A entsteht. Um einzusehen, daß $\det_n$ eine Determinante auf $M(n \times n, R)$ ist, haben wir zu überprüfen, daß $\det_n$ die Eigenschaften (I),(II),(III) aus Definition 1 hat. Die Eigenschaft (I) bzw. (III) kann man leicht aus der entsprechenden Eigenschaft (I) bzw. (III) von $\det_{n-1}$ ableiten. Um (II) zu verifizieren, geben wir uns ein $\ell \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ vor, so daß die ℓ-te und $(\ell+1)$-te Zeile von A übereinstimmen und zeigen, daß $\det_n A = 0$. Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\} - \{\ell, \ell+1\}$ stimmen zwei benachbarte Zeilen von A_{ik} überein und somit ist $\det_{n-1} A_{ik} = 0$. Wir erhalten

$$\det_n A = (-1)^{\ell+k} \cdot a_{\ell k} \cdot \det_{n-1} A_{\ell k} + (-1)^{\ell+1+k} \cdot a_{\ell+1,k} \cdot \det_{n-1} A_{\ell+1,k}$$

Da die ℓ-te und $(\ell+1)$-te Zeile von A übereinstimmen, gilt $a_{\ell k} = a_{\ell+1,k}$ und $A_{\ell k} = A_{\ell+1,k}$. Damit erhalten wir $\det_n A = 0$.
(ii) Für jedes $n \geq 2$, jedes $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ und jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt die Gleichung $(*)$ im Beweis von (i), d.h. (ii) gilt. □

Gemäß Satz 4 und Satz 5 gibt es genau eine Determinante auf $M(n\times n, R)$, die wir im folgenden mit det bezeichnen,

$$\det : M(n \times n, R) \to R$$

Satz 6. Für alle $A, B \in M(n \times n, R)$ gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Beweis. Sei $A = (a_{ij})$ und seien $b_1, b_2, \dots, b_n \in R^n$ die Zeilenvektoren von B. Der i-te Zeilenvektor von AB ist $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$. Nach $(*)$ im Beweis von Satz 4 gilt

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} b_j \end{pmatrix} =$$

$$\Big(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \Big) \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

wobei für die letzte Gleichheit die Leibnizformel benutzt wird. □

Satz 7. Für jedes $A \in M(n \times n, R)$ gilt

$$\det({}^t A) = \det A$$

Beweis. Seien $A = (a_{ij})$ und ${}^tA = (b_{ij})$, also $b_{ij} = a_{ji}$. Wir benutzen die Leibnizformel für A und ${}^tA$

$$\begin{aligned}
\det A &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} \overset{(1)}{=} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} \overset{(2)}{=} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma^{-1}(n)n} \overset{(3)}{=} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n} = \\
&= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)} = \\
&= \det({}^tA)
\end{aligned}$$

Dabei gelten die Gleichungen (1),(2),(3) aufgrund von
(1) Da die Abbildung $\sigma^{-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijektiv ist und $\sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$, entsteht das Produkt $a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$ aus dem Produkt $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot \ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$ durch Vertauschen der Faktoren.
(2) $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$ (nach §1, Proposition 5)
(3) Die Abbildung $S_n \to S_n,\ \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ ist bijektiv. □

Korollar 8.

(i) Die Eigenschaften (I) und (II) in Definition 1 und die Aussagen von Satz 3 gelten auch, wenn man das Wort "Zeile" durch das Wort "Spalte" ersetzt.

(ii) Sei $n \geq 2$ und sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Diese Formel nennt man die Entwicklung von $\det A$ nach der i-ten Zeile.

Beweis. Wir benutzen Satz 7 und beachten, daß die Zeilen (bzw. Spalten) von A mit den Spalten (bzw. Zeilen) von ${}^tA$ übereinstimmen. (ii) folgt dann aus Satz 5 (ii). □

§4 Beispiele von Determinanten

Für den gesamten Paragraph sei ein kommutativer Ring R mit Einselement gegeben.

In §3, Beispiel 2 wurde die Determinante einer (1×1)-Matrix angegeben, nämlich $\det(a) = a$.

Beispiel 1. Für jedes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, R)$ gilt

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beweis . Wir entwickeln $\det A$ nach der ersten Spalte (§3, Satz 5 (ii))

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(a_{12}) = \\
&= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

□

Definition 2. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$.

(i) A heißt *obere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $j < i$ (d.h. alle Koeffizienten unterhalb der Diagonale sind gleich Null).

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & & & * \\ & & * & & * \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

(ii) A heißt *untere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle (i, j) mit $j > i$ (d.h. alle Koeffizienten oberhalb der Diagonale sind gleich Null).

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ * & * & & & \\ * & & * & & \\ * & & & * & \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Beispiel 3. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ eine obere Dreiecksmatrix oder untere Dreiecksmatrix. Dann

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Beweis. Sei A eine obere Dreiecksmatrix. Wir führen Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist klar, da $\det(a) = a$.

$n \to n + 1$: Wir entwickeln $\det A$ nach der letzten Zeile von A (§3, Korollar 8 (ii))

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ & \ddots & & * \\ & & a_{nn} & * \\ & & & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{(n+1)+(n+1)} a_{n+1,n+1} \det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= a_{n+1,n+1} a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichung die Induktionsvoraussetzung benutzt wurde. □

Beispiel 4. Sei $A \in M(n \times n, K)$, wobei K ein Körper ist. Sei $A' = (a'_{ij}) \in M(n \times n, K)$ eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen vom Typ (I) und Typ (III) hervorgeht (III, §1, Satz 3). Sei $m \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Umformungen vom Typ (I). Dann gilt

$$\det A = (-1)^m \cdot a'_{11} a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn}$$

Beweis. Wir haben

$$\det A = (-1)^m \cdot \det A' = (-1)^m \cdot a'_{11} a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn}$$

wobei die erste Gleichung nach §3, Satz 3 (iii) gilt und die zweite Gleichung nach Beispiel 3 gilt, da A' eine obere Dreiecksmatrix ist. □

Beispiel 5. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ heißt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ & \vdots & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M(n \times n, R)$$

die *Vandermonde-Matrix* zu $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Es gilt

$$\det A = \prod_{\substack{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \\ i<j}} (a_j - a_i)$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n.
$n = 2$: Die Vandermonde-Matrix zu a_1, a_2 ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

mit $\det A = a_2 - a_1$.
$(n-1) \to n$: Ausgehend von der Vandermonde-Matrix A zu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ führen wir die folgenden elementaren Spaltenumformungen durch (in der angegebenen Reihenfolge)

- Addition des $(-a_1)$-fachen der $(n-1)$-ten Spalte zur n-ten Spalte.
- Addition des $(-a_1)$-fachen der $(n-2)$-ten Spalte zur $(n-1)$-ten Spalte.

$\vdots$

- Addition des $(-a_1)$-fachen der 1-ten Spalte zur 2-ten Spalte.

Die dabei entstehende Matrix A' hat die Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & & & \\ \vdots & & A'' & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in M(n \times n, R)$$

mit

$$A'' = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_2 a_1 & \ldots & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_1 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_3 a_1 & \ldots & a_3^{n-1} - a_3^{n-2} a_1 \\ & \vdots & & \\ a_n - a_1 & a_n^2 - a_n a_1 & \ldots & a_n^{n-1} - a_n^{n-2} a_1 \end{pmatrix} \in M((n-1) \times (n-1), R)$$

Nach §3, Korollar 8 (i) gilt

(1) $$\det A = \det A'$$

Die Entwicklung von $\det A'$ nach der ersten Zeile von A' ergibt

(2) $$\det A' = \det A''$$

Es ist

$$A'' = \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) \cdot b_2 \\ (a_3 - a_1) \cdot b_3 \\ \vdots \\ (a_n - a_1) \cdot b_n \end{pmatrix} \text{ mit } b_i = (1 \;\; a_i \;\; a_i^2 \;\; \ldots \;\; a_i^{n-2})$$

Da die Determinante multilinear in den Zeilen ist, folgt

$$\text{(3)} \qquad \det A'' = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-2} \\ & \vdots & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

ist die Vandermonde-Matrix zu $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\text{(4)} \qquad \det \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \prod_{\substack{(i,j) \in \{2,\ldots,n\}^2, \\ i<j}} (a_j - a_i)$$

Aus (1),(2),(3),(4) folgt

$$\begin{aligned} \det A &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot \prod_{\substack{(i,j) \in \{2,\ldots,n\}^2, \\ i<j}} (a_j - a_i) = \\ &= \prod_{\substack{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \\ i<j}} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

□

§5 Determinante und inverse Matrix

Für den gesamten Paragraph seien ein kommutativer Ring R mit Einselement und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben.

Definition 1. Für jede Matrix $A \in M(n \times n, R)$ definieren wir eine Matrix $A^{\mathrm{ad}} = \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in M(n \times n, R)$, indem wir für jedes (i, j) setzen

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji} \in R$$

wobei $A_{ji} \in M((n-1) \times (n-1), R)$ die Matrix ist, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht. $\tilde{A}$ heißt die *Adjunkte* von A oder die zu A *adjungierte* Matrix.

Satz 2. Für jedes $A \in M(n \times n, R)$ gilt

$$A \cdot \tilde{A} = (\det A) \cdot E_n = \tilde{A} \cdot A$$

Beweis. I) Wir zeigen $A \cdot \tilde{A} = (\det A) \cdot E_n$.
Seien $A = (a_{ij}),\ \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}),\ A \cdot \tilde{A} = (c_{ij})$. Wir haben zu zeigen

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Es ist $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{kj}$ und somit gilt nach Definition von $\tilde{a}_{kj}$

$$(*) \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{ik} \cdot \det A_{jk}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $i = j$. Nach $(*)$ und der Entwicklung von $\det A$ nach der j-ten Zeile gilt

$$c_{jj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{jk} \cdot \det A_{jk} = \det A.$$

Sei nun $i \neq j$. Sei $A' = (a'_{ij}) \in M(n \times n, R)$ die Matrix, die dadurch entsteht, daß man in A die j-te Zeile durch die i-te Zeile ersetzt. Dann gilt

$$a_{ik} = a'_{jk} \text{ und } A_{jk} = A'_{jk}$$

woraus sich mit $(*)$ und der Entwicklung von $\det A'$ nach der j-ten Zeile ergibt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a'_{jk} \cdot \det A'_{jk} = \det A'$$

Die i-te Zeile und die j-te Zeile von A' stimmen überein. Deshalb $\det A' = 0$ (§3, Satz 3 (ii)). Damit ist gezeigt $c_{ij} = 0$.
II) Die Gleichung $\tilde{A} \cdot A = (\det A) \cdot E_n$ kann man mit Überlegungen analog zu denen in I) zeigen, wobei jedoch Spalten statt Zeilen benutzt werden. □

Korollar 3. Eine Matrix $A \in M(n \times n, R)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\det A$ eine Einheit des Rings R ist. Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis. Sei zunächst A invertiebar. Dann haben wir die inverse Matrix A^{-1} und es gilt

$$A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$$

Hieraus folgt mit der Muliplikationseigenschaft für Determinanten (§3, Satz 6) und $\det E_n = 1$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 = \det A^{-1} \cdot \det A$$

Diese beiden Gleichungen besagen, daß $\det A$ eine Einheit des Rings R ist und $(\det A)^{-1} = \det A^{-1}$.
Sei nun umgekehrt $\det A$ eine Einheit des Rings R. Dann haben wir die Matrix $(\det A)^{-1} \cdot \tilde{A} \in M(n \times n, R)$ und nach Satz 2 gilt

$$A \cdot [(\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}] = E_n = [(\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}] \cdot A$$

Diese beiden Gleichungen besagen, daß A invertierbar ist und $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}$. □

Aus Korollar 3 folgt

Korollar 4. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ über einem Körper ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

§6 Determinante und Spur eines Endomorphismus

Sei K ein Körper.

Definition 1. Für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ setzt man

$$\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \in K$$

$\mathrm{tr}(A)$ heißt die *Spur* von A.

Lemma 2.

(i) Für $A, B \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$ gilt $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ und $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \mathrm{tr}(A)$, d.h. die Abbildung $\mathrm{tr} : M(n \times n, K) \to K,\ A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ ist linear.

(ii) Für $A, B \in M(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Beweis. (ii) Für $C, D \in M(n \times n, K)$ mit $C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$ und $CD = (f_{ij})$ gilt

$$\mathrm{tr}(CD) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_{ji}) = \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} c_{ij}d_{ji}$$

Hieraus folgt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. □

Lemma 3. Seien V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V. Für die Matrizen $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}, M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ gilt

(i) $\mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}})$.

(ii) $\det(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \det(M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}})$.

Beweis. (i) Nach der Transformationsformel (II, §3, Satz 12) gibt es ein $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ ($n = \dim V$) mit $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = T^{-1}M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}T$. Mit Lemma 2 (ii) ergibt sich dann $\mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \mathrm{tr}(T^{-1}(M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}T)) = \mathrm{tr}((M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}T)T^{-1}) = \mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}(TT^{-1})) = \mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}})$.
ii) Für alle $A, B \in M(n \times n, K)$ gilt $\det(AB) = \det(BA)$ (denn nach §3, Satz 6 haben wir $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$). Deshalb läßt sich (ii) analog zu (i) beweisen. □

Aufgrund von Lemma 3 können wir definieren

Definition 4. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Für jedes $f \in \mathrm{End}(V)$ definiert man $\det(f), \mathrm{tr}(f) \in K$ durch

(i) Ist $V = \{0\}$, so setze $\det(f) = 1$, und ist $V \neq \{0\}$, so wähle eine Basis $\mathcal{A}$ von V und setze $\det(f) = \det(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}})$.

(ii) Ist $V = \{0\}$, so setze $\mathrm{tr}(f) = 0$, und ist $V \neq \{0\}$, so wähle eine Basis $\mathcal{A}$ von V und setze $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}})$.

$\det(f)$ heißt die *Determinante* von f und $\mathrm{tr}(f)$ heißt die *Spur* von f.

Proposition 5. Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Es gelten

(i) Ein $f \in \mathrm{End}(f)$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $\det(f) \neq 0$. Gelten diese äquivalenten Bedingungen, so ist $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$.

(ii) Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$.

(iii) Die Abbildung $\mathrm{End}(V) \to K,\ f \mapsto \mathrm{tr}(f)$ ist linear, d.h. für alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ gilt $\mathrm{tr}(f + g) = \mathrm{tr}(f) + \mathrm{tr}(g)$ und $\mathrm{tr}(\lambda f) = \lambda \cdot \mathrm{tr}(f)$.

Beweis. Wir können annehmen $V \neq \{0\}$. Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V.
(i) Nach II, §3, Proposition 10 (ii) ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ invertierbar ist, und nach §5, Korollar 4 gilt das letztere genau dann, wenn $\det(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}) \neq 0$, d.h. $\det(f) \neq 0$.
Ist f ein Isomorphismus und somit $\det(f) \neq 0$, so erhalten wir wieder mit II, §3, Proposition 10 (ii) und §5, Korollar 4 $\det(f^{-1}) = \det(M_{f^{-1},\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \det((M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}})^{-1}) = (\det(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}))^{-1} = (\det(f))^{-1}$.
(ii) Mit II §3, Proposition 9 (ii) und §3, Satz 6 erhalten wir $\det(f \circ g) = \det(M_{f\circ g,\mathcal{A},\mathcal{A}})$ $= \det(M_{f,\mathcal{A}\mathcal{A}} \cdot M_{g,\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \det(M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}) \cdot \det(M_{g,\mathcal{A},\mathcal{A}}) = \det(f) \cdot \det(g)$.
(iii) Die Abbildung in (iii) ist die Komposition der beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V) \to M(n \times n, K)\ , &\quad f \mapsto M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \\ M(n \times n, K) \to K\ , &\quad A \mapsto \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

und diese beiden Abbildungen sind linear nach II §3, Proposition 8 (ii) und Lemma 2 (i). $\square$