Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 9.Blatt

Aufgabe 1:
Sei U der Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugt wird mit

$$v_1 = (1, 2, 3, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 2, 1, 1).$$

$\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ versehen, U sei mit dem Skalarprodukt versehen, das sich durch Restriktion von $\langle\ ,\ \rangle$ auf U ergibt.

(i) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U, indem Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf (v_1, v_2, v_3) anwenden.

(ii) Es ist $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$. Bestimmen Sie zu $x = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ die eindeutig bestimmten $s, t \in \mathbb{R}^4$, so daß
- $s \in U$
- $t \in U^\perp$
- $x = s + t$.

(iii) Geben Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von U an.

(iv) Geben Sie alle Ergänzungen von $\mathcal{B}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 2:
Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, daß es genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V gibt, so daß $\mathcal{A}$ eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist.

Aufgabe 3:
Geben Sie alle Matrizen $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ an, die obere Dreiecksmatrizen und unitär sind.