Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 6.Blatt

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, daß der Endomorphismus $f := L_{A,\mathcal{A},\mathcal{A}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

nilpotent ist und bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$, so daß $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Geben Sie die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, daß der Endomorphismus $f := L_{A,\mathcal{A},\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

nilpotent ist und bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so daß $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Geben Sie die Matrix $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

Aufgabe 3:

(i) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume von V mit $V = \sum_{i=1}^n U_i$. Zeigen Sie: Es ist $\dim V \leq \sum_{i=1}^n \dim U_i$, und es ist $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim U_i$ genau dann, wenn $V = \oplus_{i=1}^n U_i$.

(ii) Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum, U ein Untervektorraum und $(v_1, \ldots, v_m) \in V^m$ ein linear unabhängiges Tupel, so daß $U \cap \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \{0\}$. Zeigen Sie, daß $(v_1, \ldots, v_m)$ zu einem linear unabhängigen Tupel $(v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_n) \in V^n$ ergänzt werden kann, so daß $V = U \oplus \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.