Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 5.Blatt

Aufgabe 1:
In der Vorlesung wurde für einen Endomorphismus f eines K-Vektorraums V und ein Polynom $p \in K[X]$ ein Endomorphismus $p(f)$ von V definiert. Definieren Sie entsprechend für eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ und $p \in K[X]$ eine Matrix $p(A)$. Zeigen Sie, daß für alle Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{cp}_A(A) = 0$.

Aufgabe 2:
Ist die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$
diagonalisierbar? Wenn ja, so geben Sie ein $T \in GL(3, \mathbb{Q})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ mit $D = T^{-1}AT$ an.

Aufgabe 3:
Seien V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ f-invariante Untervektorräume von V mit $U_i \neq \{0\}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $V = \oplus_{i=1}^n U_i$. Setze $f_i := f|U_i : U_i \to U_i$. Zeigen Sie

- **(i)** Für jedes $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f_i; \lambda) \subseteq \mathrm{Eig}(f; \lambda)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\mathrm{Eig}(f; \lambda) = \oplus_{i=1}^n \mathrm{Eig}(f_i; \lambda)$.
- **(ii)** Ist f_i diagonalisierbar für $i = 1, \ldots, n$, so ist f diagonalisierbar.
- **(iii)** Ist f_i trigonalisierbar für $i = 1, \ldots, n$, so ist f trigonalisierbar.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie

- **(i)** Sind f, g Endomorphismen eines Vektorraums V mit $g \circ f = f \circ g$, so sind die Untervektoräume $\ker(g)$ und $\mathrm{im}(g)$ von V f-invariant.
- **(ii)** Ist f ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V, so sind für jedes Polynom $p \in K[X]$ die Untervektorräume $\ker p(f)$ und $\mathrm{im}\, p(f)$ von V f- invariant.