Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 4.Blatt

Seien K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Für $r \in \{0, 1, \ldots, \min(m, n)\}$ definieren wir eine Matrix $F_r = (a_{ij}^{(r)}) \in M(m \times n, K)$ durch: Ist $r = 0$, so ist $a_{ij}^{(r)} = 0$ für alle (i, j), und ist $r \neq 0$, so ist ist $a_{ij}^{(r)} = 1$ für alle $(i, j) \in \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (r, r)\}$ und $a_{ij}^{(r)} = 0$ für alle $(i, j) \notin \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (r, r)\}$.
Auf Übungsblatt 9 der Vorlesung Lineare Algebra I wurde das folgende Ergebnis angesprochen

(∗) Sind V, W Vektorräume über K mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$ und ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gibt es eine Basis $\mathcal{A}$ von V und eine Basis $\mathcal{B}$ von W und ein $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \min(m, n)\}$, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}} = F_r \in M(m \times n, K)$.

Sind $A, B \in M(m \times n, K)$, so heißt A *äquivalent* zu B, geschrieben $A \approx B$, wenn es $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $B = SAT$ gibt.

Aufgabe 1:

(i) Zeigen Sie, daß $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf $M(m \times n, K)$ ist.
(ii) Zeigen Sie, daß für $A, B \in M(m \times n, K)$ mit $A \approx B$ gilt $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.
(iii) Folgern Sie aus (∗), daß $\{[F_0], [F_1], \ldots, [F_{\min(m,n)}]\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\approx$ auf $M(m \times n, K)$ ist.
(iv) Zeigen Sie, daß für $i, j \in \{0, 1, \ldots, \min(m, n)\}$ mit $i \neq j$ gilt $[F_i] \neq [F_j]$.
(v) Zeigen Sie, daß für $A, B \in M(m \times n, K)$ genau dann gilt $A \approx B$, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

In V, §4, Beispiel 3 der Vorlesung wird die Ähnlichkeitsrelation $\sim$ auf der Menge $M(n \times n, K)$ eingeführt. Gemäß Aufgabe 1 lassen sich die Äquivalenzklassen von $\approx$ auf $M(n \times n, K)$ sehr einfach angeben. Wesentlich schwieriger ist es, die Äquivalenzklassen von $\sim$ auf $M(n \times n, K)$ zu beschreiben. Für den Fall, daß der Körper K algebraisch abgeschlossen ist, werden Sie eine befriedigende Antwort auf dieses Problem in Chapter VI der Vorlesung kennen lernen.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die Eigenwerte des Endomorphismus

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3, -x_2, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$$

und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von f eine Basis des Vektorrauns $\mathrm{Eig}(f; \lambda)$.

Für einen Eigenwert λ eines Endomorphismus f bezeichne $\mathrm{geo}(\lambda, f)$ die geometrische Vielfachheit von λ in f und $\mathrm{alg}(\lambda, f)$ die algebraische Vielfachheit von λ in f.

Aufgabe 3:
Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und f ein Automorphismus von V. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie

(i) $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist ein Eigenwert von f^{-1} und $\mathrm{geo}(\lambda, f) = \mathrm{geo}(\lambda^{-1}, f^{-1})$.
(ii) λ^2 ist ein Eigenwert von f^2 und es ist $\mathrm{geo}(\lambda^2, f^2) \geq \mathrm{geo}(\lambda, f)$. Geben Sie ein Beispiel für f und λ, so daß $\mathrm{geo}(\lambda^2, f^2) > \mathrm{geo}(\lambda, f)$.
(iii) Geben Sie ein Beispiel für f und λ mit $\mathrm{alg}(\lambda, f) > \mathrm{geo}(\lambda, f)$.