Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 3.Blatt

Aufgabe 1:
Sei U ein Untervektorraum eines Vektorraums V. Betrachtet wird der Vektorraum V/U. Zeigen Sie,

(i) Ist $a \in V$, so ist $a + U = 0_{V/U}$ genau dann, wenn $a \in U$.
(ii) Für $a \in V$ und $b \in U$ gilt $(a + b) + U = a + U$.

Aufgabe 2:

(i) Seien $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und U ein Unterktorraum von V mit $U \subseteq \ker f$. Gemäß Vorlesung V, §3, Satz 8 haben wir dann die lineare Abbildung $\overline{f} : V/U \to W$, $a + U \mapsto f(a)$. Zeigen Sie
  (α) Es ist $\mathrm{im}(\overline{f}) = \mathrm{im}(f)$. Die Abbildung $\overline{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn die Abbildung f surjektiv ist.
  (β) Es $\ker \overline{f} = \pi(\ker f)$ mit $\pi : V \to V/U$ die natürliche Abbildung. Die Abbildung $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \ker f$.
(ii) Zeigen Sie, daß für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ die Vektorräume $V/\ker f$ und $\mathrm{im}(f)$ isomorph sind.

Aufgabe 3:
Seien V ein K-Vektorraum und U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$.

(i) Zu jedem $x \in V$ gibt es genau ein $(u, w) \in U \times W$ mit $x = u + w$ und wir definieren eine Abbildung $f : V \to W$, indem wir setzen $f(x) := w$. Zeigen Sie, daß f linear ist.
(ii) Zeigen Sie, daß es die Abbildung $g : V/U \to W, a + U \mapsto f(a)$ gibt und diese Abbildung linear und ein Isomorphismus ist.
(iii) Sei $\pi_W : W \to V/U$ die Einschränkung der natürlichen Abbildung $V \to V/U$ auf W. Zeigen Sie, daß $\pi_W \circ g = \mathrm{id}_{V/U}$ und $g \circ \pi_W = \mathrm{id}_W$.

Sind f ein Endomorphismus eines Vektorraums V und $n \in \mathbb{N}$, so bezeichnet $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \in \mathrm{End}(V)$ das n-fache Kompositum von f mit sich selbst. Weiterhin setzt man $f^0 := \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 4:
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(i) Geben Sie alle Eigenwerte des Nullendomorphismus $f : V \to V, v \mapsto 0$ an.
(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, daß $2 + \lambda - 3\lambda^4$ ein Eigenwert des Endomorphismus $2\mathrm{id}_V + f - 3f^4 \in \mathrm{End}(V)$ ist.
(iii) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, so daß es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n = 0 \in \mathrm{End}(V)$ gibt. Geben Sie alle Eigenwerte von f an.