Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 2.Blatt

Für einen Körper K haben wir den Polynomring $(K[X], +, \cdot)$. Indem man für $\lambda \in K$ und $f \in K[X]$ setzt

$$\lambda * f := \lambda \cdot f \in K[X],$$

erhält man einen K-Vektorraum $(K[X], +, *)$.

Aufgabe 1:
Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Setze $U_n := \{f \in K[X] \mid f \neq 0_{K[X]} \text{ und } \deg(f) \leq n\} \cup \{0_{K[X]}\}$. Für $i = 0, 1, \ldots, n$ sei $f_i \in K[X]$ ein Polynom mit $f_i \neq 0_{K[X]}$ und $\deg(f_i) = i$.

(i) Zeigen Sie, daß U_n ein Untervektorraum des K-Vektorraums $K[X]$ und $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis von U_n ist.
(ii) Gibt es eine Basis $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$ von U_n mit $\deg(g_i) = n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$?
(iii) Zeigen Sie, daß der K-Vektorraum $K[X]$ nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper. Gemäß Vorlesung Lineare Algebra I haben wir den K-Vektorraum $M(K, K)$ aller Abbildungen $K \to K$. Wie oben angegeben haben wir den K-Vektorraum $K[X]$. Zu jedem $p \in K[X]$ haben wir die Abbildung $\tilde{p} : K \to K, a \mapsto p(a)$. Betrachtet wird die Abbildung $\varphi : K[X] \to M(K, K), p \mapsto \tilde{p}$. Die Abbildung φ ist linear. (Warum?) Zeigen Sie

(i) φ ist injektiv genau dann, wenn die Menge K unendlich ist.
(ii) φ ist surjektiv genau dann, wenn die Menge K endlich ist.

Aufgabe 3:
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. Betrachtet wird der Polynomring $A[X]$. Sei B die Menge aller $f \in A[X]$, so daß es ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ mit

$$f = a_0 + a_1X^3 + a_2X^6 + a_3X^9 + \ldots + a_nX^{3n}$$

gibt.

(i) Zeigen Sie, daß B ein Unterring des Rings $A[X]$ ist und $A \subseteq B$ und $X^3 \in B$.
(ii) Ist der Ring B ein Polynomring über A in der Variablen X^3 ?