Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 13.Blatt

Aufgabe 1:
Betrachtet wird der symmetrische bilineare Raums $(\mathbb{R}^3, b)$ mit b die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^3, b)$ und Untervektorräume V_+, V_-, V_0 von $\mathbb{R}^3$, so daß $(\mathbb{R}^3, b) = V_+ \perp V_- \perp V_0$ und $b|V_+$ positiv definit, $b|V_-$ negativ definit, $b|V_0 = 0$.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper, so daß $1 + 1 \neq 0$ und es zu jedem $x \in K$ ein $y \in K$ mit $x = y^2$ gibt. (Zum Beispiel ist dies für den Körper $\mathbb{C}$ erfüllt, siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 4).
Zeigen Sie, daß jeder endlich erzeugte symmetrische bilineare Raum (V, b) über K mit $V \neq \{0\}$ eine Orthogonalbasis $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ hat, so daß $b(v_i, v_i) \in \{0, 1\} \subseteq K$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 3:
Sei K wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß zwei endlich erzeugte nicht ausgeartete symmetrische bilineare Räume (V, b) und (V', b') über K genau dann isometrisch sind, wenn $\dim V = \dim V'$.

Aufgabe 4:
Seien (V, b) ein endlich erzeugter symmetrischer bilinearer Raum über $\mathbb{R}$ und U, W Untervektorräume von V mit $V = U \perp W$. Zeigen Sie, daß gilt $\dim_-(V, b) = \dim_-(U, b|U) + \dim_-(W, b|W)$.