Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 12.Blatt

Aufgabe 1:

(i) Gemäß Vorlesung gibt es zu jedem Körper K und jedem $n \in \mathbb{N}$ und jeder Bilinearform $b : K^n \times K^n \to K$ eine eindeutig bestimmte Matrix $R \in M(n \times n, K)$, so daß für alle $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ gilt

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

(ii) Die Abbildung $b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_2y_3 - x_3y_2$ ist bilinear. Ist b symmetrisch? Ist b antisymmetrisch? Schreiben Sie b in der Form von (i). Bestimmen Sie die Matrix $M_{b,\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 2:
Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Bilinearform $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, x_2)(y_1, y_2)) \mapsto ax_1y_1 + bx_2y_2$ nicht ausgeartet?

Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt *kongruent* zu einer Matrix $B \in M(n \times n, K)$, wenn es ein $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $B = {}^tTAT$ gibt. Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation. Warum?

Aufgabe 3:
Seien (V, b) und (V', b') zwei bilineare Räume über einem Körper K. Die Vektorräume V und V' seien endlich erzeugt und ungleich Null. Zeigen Sie, daß äquivalent sind

(i) (V, b) und (V', b') sind isometrisch.

(ii) Es gibt eine Basis $\mathcal{A}$ von V und eine Basis $\mathcal{A}'$ von V' mit $M_{b,\mathcal{A}} = M_{b',\mathcal{A}'}$.

(iii) Es ist $\dim V = \dim V'$ und für jede Basis $\mathcal{A}$ von V und jede Basis $\mathcal{A}'$ von V' sind die Matrizen $M_{b,\mathcal{A}}$ und $M_{b',\mathcal{A}'}$ kongruent.