Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 11.Blatt

Aufgabe 1:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter untärer Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Setze $n := \dim V$. Zeigen Sie

(i) f ist normal genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ gibt, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix ist.

(ii) f ist anti-selbstadjungiert genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ gibt, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix ist,

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},$$

wobei $a_\ell \in \mathbb{R}i$ für $\ell = 1, \ldots, n$.

(iii) f ist unitär genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ gibt, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine Diagonalmatrix ist,

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix},$$

wobei $|a_\ell| = 1$ für $\ell = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2:
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, daß äquivalent sind

(i) A ist hermitesch.

(ii) Es gibt ein unitäre Matrix $T \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe 3:
Setze

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$$

(i) Zeigen Sie, daß A hermitesch ist.

(ii) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $T \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so daß $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe 4:
Gemäß Vorlesung ist jede symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diagonalisierbar. Gemäß Aufgabe 2 ist jede hermitesche Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ an, die nicht diagonalisierbar ist.