Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, 10.Blatt

Aufgabe 1:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeigen Sie, daß $(v+w) \perp (v-w)$ genau dann gilt, wenn $\|v\| = \|w\|$.

Aufgabe 2:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorräume und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß äquivalent sind

(i) Für alle $v, w \in V$ mit $v \perp w$ gilt $f(v) \perp f(w)$.
(ii) Für alle $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ gilt $\|f(v)\| = \|f(w)\|$.
(iii) Es gibt eine orthogonale lineare Abbildung $g : V \to V$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f = \lambda g$.

(Hinweis. Übungsblatt 9, Aufgabe 4).

Aufgabe 3:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ und $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ endlich erzeugte unitäre Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie

(i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(\lambda f)^{\mathrm{ad}} = \overline{\lambda} f^{\mathrm{ad}}$.
(ii) $(f^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} = f$.

Aufgabe 4:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter unitäre Vektorräume, $f \in \mathrm{End}(V)$ und U ein f-invarianter Untervektorraum von V. Zeigen Sie, das $U^{\perp}$ f^{ad}-invariant ist.

Aufgabe 5:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\} \text{ und } \mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}.$$

(i) Zeigen Sie, daß $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ Untergruppen der Gruppen $(\mathrm{O}(n), \cdot)$ und $(\mathrm{U}(n), \cdot)$ sind.
(ii) Gemäß Vorlesung haben wir die surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2), \quad \alpha \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{SO}(2), \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, d.h. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$. Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Aussage.
(iii) Zeigen Sie, daß $\mathrm{SU}(2) = \{\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ und } |a|^2 + |b|^2 = 1\}$.