Huber, Linden **SS 2019**

Lineare Algebra I

13.Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben werden in der ersten Übung zu der Vorlesung Lineare Algebra II im WS 2019/2020 besprochen.

Aufgabe 1:

(i) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

(ii) Bestimmen Sie in Abhängigkeit $e, f \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} f & f & f & 0 \\ 0 & e & e & e \\ 2 & f & f & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

Aufgabe 2:

Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n \times n, R)$. Es gebe ein $a \in R$, so daß $a_{ij} = a$ für alle i, j mit $j \geq i$. Also

$$A = \begin{pmatrix} a & \ldots & \ldots & a \\ \star & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \ldots & \star & a \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß gilt $\det A = a(a - a_{21})(a - a_{32}) \ldots (a - a_{n,n-1})$.

Aufgabe 3:

Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n \times n, R)$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } j - i = 1 \\ -1 & \text{wenn } i - j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß gilt

$$\det A_n = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie

(i) Ist ${}^tA = -A$ und n ungerade, so ist $\det A = 0$.

(ii) Ist $({}^tA) \cdot A = E_n$, so ist $\det A \in \{1, -1\}$.