Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

9.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für zwei Elemente $a, b \in V$ ist der Abstand $d(a, b) \in \mathbb{R}_+$ definiert durch $d(a, b) := \|a - b\|$. Für zwei Teilmengen S und T von V ist der Abstand $d(S, T) \in \mathbb{R}_+$ definiert durch $d(S, T) := \inf\{d(s, t) \mid s \in S, t \in T\}$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $a, b, c \in V$ gilt:
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$ (Dreiecksungleichung)
- Ist $(c - a) \perp (c - b)$, so ist $d(a, b)^2 = d(a, c)^2 + d(c, b)^2$ (Satz von Pythagoras)

(ii) Ist V endlich erzeugt und sind U ein Untervektorraum von V und $a \in V$, so gibt es genau ein $b \in U$ mit $a - b \in U^\perp$ und es ist $d(a, U) = d(a, b)$.

Aufgabe 2:
Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Betrachtet wird der Untervektorraum $U = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ von $\mathbb{R}^5$ mit $w_1 = (1, 1, 1, 1, 1), w_2 = (2, 0, 0, 2, 1), w_3 = (1, 0, 0, 0, 1)$.

(i) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von U.
(ii) Bestimmen Sie für $x := (0, 1, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^5$ die eindeutig bestimmten $s \in U$ und $t \in U^\perp$ mit $x = s + t$.
(iii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.
(iv) Bestimmen Sie den Abstand von U und $(0, 1, -1, 0, 1)$ (cf. Aufgabe 1).

Aufgabe 3:

(i) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ (cf. Präsenzblatt 2) sei mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$
versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid f \neq 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ und } \deg(f) \leq 2\} \cup \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
(ii) Läßt jedes Orthonormalsystem eines endlich erzeugten unitären Vektorraums $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ zu einer Orthonormalbasis von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ergänzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ und $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidische Vektorräume. Zeigen Sie

(i) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$.
(ii) Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ sind äquivalent
- f ist orthogonal.
- Es ist $\|f(v)\| = \|v\|$ für jedes $v \in V$.
- Es ist $\|f(v)\| = 1$ für jedes $v \in V$ mit $\|v\| = 1$.

(iii) Sind V und W endlich erzeugt, so gibt es eine orthogonale Abbildung $(V, \langle\ ,\ \rangle) \to (W, \langle\ ,\ \rangle)$ genau dann, wenn $\dim V \leq \dim W$.