Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

8.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Matrizen $B \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ in Jordanscher Normalform, die ähnlich zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$$

sind. Geben Sie zu jeder dieser Matrizen B ein $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ mit $B = T^{-1}AT$ an.

Aufgabe 2:

(i) Sei $A \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{cp}_A = (X-1)^3(X-2)^2$ und $\dim \mathrm{Eig}(A;1) = 2$ und $\dim \mathrm{Eig}(A;2) = 1$. Geben Sie die Menge $\{B \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid B$ ist von Jordanscher Normalform und ähnlich zu $A\}$ an.

(ii) Zeigen Sie, daß die Menge
$$\{A \in M(5 \times 5, \mathbb{R}) \mid \mathrm{cp}_A = (X-1)^3(X-2)^2 \text{ und } \mathrm{rk}(A - 2E_5) = 4\}$$
eine Vereinigung von endlich vielen Ähnlichkeitsklassen von $M(5 \times 5, \mathbb{R})$ ist und geben Sie die Anzahl dieser Ähnlichkeitsklassen an.

Aufgabe 3:
Für $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$ setze $\langle x, y \rangle := \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + 2\overline{x_3}y_3 + \overline{x_1}y_3 + \overline{x_3}y_1$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ ein Skalarprodukt des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ ist.

In Lineare Algebra I, Chapter IV, §6 wurde die Spur $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}$ einer Matrix $A = (a_{ij})$ definiert und untersucht.

Aufgabe 4:
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Betrachtet wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ ist kein Skalarprodukt auf V und die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{tr}((^tA)B)$ ist ein Skalarprodukt auf V.