

## Lineare Algebra II

## 7. Übungsblatt

Die Zulassungsvoraussetzung zu der Klausur oder Nachklausur von 30% der Übungspunkte bezieht sich auf die Übungsblätter 1-12.

Ab Donnerstag, 23.1.2020 finden Sie auf einem weißen Brett in F.13 eine Liste der Studierenden, die 30 % der Übungspunkte erreicht haben.

Zu Klausur und Nachklausur müssen Sie sich beim Prüfungsamt anmelden. Studieren Sie in einem Fach mit beschränkt wiederholbarer schriftlicher Prüfung zu Lineare Algebra II, so müssen Sie sich mit einem Formular beim Prüfungsamt anmelden. Studieren Sie in einem Fach mit unbeschränkt wiederholbarer schriftlicher Prüfung zu Lineare Algebra II, so müssen Sie sich über Wusel beim Prüfungsamt anmelden. Für Anmeldung über Wusel gelten die folgenden Fristen

Klausur:	Nachklausur:
Anmeldebeginn 10.01.2020	Anmeldebeginn 24.02.2020
Anmeldeende 24.01.2020	Anmeldeende 07.03.2020
Rücktrittsende 31.01.2020	Rücktrittsende 07.03.2020

**Aufgabe 1:**

Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $f \in \text{End}(V)$  und  $U$  ein  $f$ -invarianter Untervektorraum von  $V$ . Seien  $f' \in \text{End}(U)$  und  $\bar{f} \in \text{End}(V/U)$  die in der Vorlesung angegebenen Endomorphismen. Sei  $\pi : V \rightarrow V/U$  die natürliche Abbildung. Zeigen Sie

- (i) Für jedes  $\lambda \in K$  gilt  $\pi(\text{Eig}(f; \lambda)) \subseteq \text{Eig}(\bar{f}; \lambda)$ .
- (ii) Sind  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für  $i \neq j$  und  $v_i \in \text{Eig}(f; \lambda_i)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  und gilt  $v_1 + \dots + v_n \in U$ , so ist  $v_i \in U$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ . (Hinweis. Beachten Sie  $\pi : V \rightarrow V/U$ ).
- (iii) Ist  $V$  endlich erzeugt und sind die Vektorräume  $V, U, V/U$  ungleich Null und ist  $f$  diagonalisierbar, so sind auch die Endomorphismen  $f'$  und  $\bar{f}$  diagonalisierbar.

**Aufgabe 2:**

Seien  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum mit  $V \neq \{0\}$  und  $f \in \text{End}(V)$ . Zeigen Sie

- (i)  $f$  ist trigonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis  $\mathcal{A}$  von  $V$  gibt, so daß  $M_{f, \mathcal{A}, \mathcal{A}}$  eine untere Dreiecksmatrix ist.
- (ii) Ist  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $f$  und sind  $a, g \in \mathbb{N}$  die algebraische und geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ , so gilt  $E(f; \lambda) = \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_V)^{a-g+1}$ .

**Aufgabe 3:**

Betrachtet wird der Endomorphismus  $f = L_{A, \mathcal{A}, \mathcal{A}} : \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^5$  mit  $\mathcal{A}$  die Standardbasis von  $\mathbb{Q}^5$  und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, daß es eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{Q}^5$  gibt, so daß  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Geben Sie solch eine Basis  $\mathcal{B}$  und die Matrix  $M_{f, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$  an.