Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

6.Übungsblatt

Aufgabe 1:

(i) Seien V ein Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und $U_1, U_2, \ldots, U_n$ f-invariante Untervektorräume von V mit $V = \oplus_{i=1}^n U_i$. Setze $f_i := f|U_i : U_i \to U_i$. Zeigen Sie, daß für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt $\ker f^\ell = \oplus_{i=1}^n \ker(f_i)^\ell$.

(ii) Seien V ein Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\mathcal{A}$ eine Basis von V, so daß die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ Blockgestalt hat,

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß es f-invariante Untervektorräume $U_1, \ldots, U_r$ von V und zu jedem $i = 1, \ldots, r$ eine Basis $\mathcal{A}_i$ von U_i gibt, so daß $V = \oplus_{i=1}^r U_i$ und für die Restriktion $f_i := f|U_i : U_i \to U_i$ gilt $M_{f_i,\mathcal{A}_i,\mathcal{A}_i} = A_i$.

(iii) Seien V ein K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\mathcal{A}$ eine Basis von V, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist,

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} J(m_1,\lambda_1) & & & \\ & J(m_2,\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(m_r,\lambda_r) \end{pmatrix}$$

mit $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Setze $I := \{1, 2, \ldots, r\}$. Zeigen Sie, daß für jedes $\lambda \in K$ gilt

$$\dim \operatorname{Eig}(f;\lambda) = |\{i \in I \mid \lambda_i = \lambda\}|$$

Aufgabe 2:

(i) Zeigen Sie, daß die folgenden Endomorphismen f nilpotent sind. Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathcal{A}$, so daß die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ Jordansche Normalform hat. Geben Sie jeweils $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ an.

(a) $f : \mathbb{Q}^6 \to \mathbb{Q}^6, (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_4 + x_5, -x_4 + x_5, 0, x_6, x_6, 0)$

(b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2 - x_3, 0, x_1 + 2x_2 - x_3, 0)$

(ii) Betrachtet wird der Endomorphismus $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (3x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2 + 2x_3)$. Zeigen Sie, daß es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so daß der Endomorphismus $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^3}$ nilpotent ist. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{C}^3$, so daß die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ Jordansche Normalform hat. Geben Sie $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ an.

Aufgabe 3:

Seien V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\operatorname{rk}(f) = 1$.

(i) Zeigen Sie, daß f entweder nilpotent oder diagonalisierbar ist.

(ii) Sei f nilpotent. Geben Sie eine Matrix A in Jordanscher Normalform an, so daß es eine Basis $\mathcal{A}$ von V mit $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = A$ gibt.