Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

5.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$. In der Vorlesung wurde bewiesen, daß $\operatorname{cp}_f(f) = 0$. In dieser Aufgabe sollen Sie einen neuen Beweis dieser Aussage geben, unter der Voraussetzung, daß V f-zyklisch ist, d.h. es gibt ein $v \in V$, so daß V von der Menge $\{v, f(v), f^2(v), \ldots\}$ erzeugt wird.

(i) Sei n das eindeutig bestimmte Element von $\mathbb{N}_0$, so daß das Tupel $(v, f(v), \ldots, f^n(v)) \in V^{n+1}$ linear unabhängig und das Tupel $(v, f(v), \ldots, f^n(v), f^{n+1}(v)) \in V^{n+2}$ linear abhängig ist. Zeigen Sie, daß es eindeutig bestimmte $a_0, \ldots, a_n \in K$ mit
$$f^{n+1}(v) = a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_n f^n(v)$$
gibt.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathcal{A} := (v, f(v), \ldots, f^n(v))$ eine Basis von V ist.

(iii) Bestimmen Sie die Matrix $M_{f\mathcal{A},\mathcal{A}}$ und zeigen Sie, daß $\operatorname{cp}_f = X^{n+1} - a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0$. (Hinweis. Übungsblatt 1, Aufgabe 1)

(iv) Zeigen Sie, daß $\operatorname{cp}_f(f) = 0$.

Aufgabe 2:
Für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ haben wir den Endomorphismus
$$f_{(a,b)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2.x_3) \mapsto (x_1, ax_1 + bx_2 + x_3, -x_3)$$
Bestimmen Sie die Menge $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{(a,b)} \text{ ist diagonalisierbar}\}$ und bestimmen Sie für jedes $(a, b) \in D$ eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^3$, so daß $M_{f_{(a,b)},\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3:
Betrachtet wird die lineare Abbildung
$$f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (-z_1 - z_3 + z_4, z_1 - z_2 + z_3, z_1 + z_2 - z_3, -2z_4)$$

(i) Zeigen Sie, daß mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f ist.

(ii) Ist f diagonalisierbar? Ist f trigonalisierbar? (Begründen Sie Ihre Antworten).

Aufgabe 4:
Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$. Setze $n := \dim V$. Zeigen Sie, daß äquivalent sind

(i) f ist trigonalisierbar.

(ii) Es gibt f-invariante Untervektorräume $V_1, \ldots, V_n$ von V, so daß $\dim V_i = i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_n$.