Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

4.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

und jeweils eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda)$.

Sind V, W Vektorräume über einem Korper K und $f : V \to V$, $g : W \to W$ Endomorphismen, so heißen f und g ähnlich, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

Aufgabe 2:
Seien V, W Vektorräume über einem Korper K und $f : V \to V$, $g : W \to W$ Endomorphismen. Zeigen Sie

(i) Sind f und g ähnlich, so sind für jedes $\lambda \in K$ die Vektorräume $\mathrm{Eig}(f; \lambda)$ und $\mathrm{Eig}(g; \lambda)$ isomorph.

(ii) Sind V und W endlich erzeugt und $V \neq \{0\}$ und $W \neq \{0\}$, so sind äquivalent

- (α) f und g sind ähnlich.
- (β) $\dim V = \dim W$ und für jedes Basis $\mathcal{A}$ von V und jede Basis $\mathcal{B}$ von W sind die Matrizen $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ und $M_{g,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ ähnlich (im Sinne von V,§4, Beispiel 3).
- (γ) Es gibt eine Basis $\mathcal{A}$ von V und eine Basis $\mathcal{B}$ von W, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = M_{g,\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Aufgabe 3:
Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$. Seien U_1 und U_2 f-invariante Untervektorräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$. Für $i = 1, 2$ setze $f_i := f|U_i : U_i \to U_i$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{cp}_f = \mathrm{cp}_{f_1} \cdot \mathrm{cp}_{f_2}$.

Aufgabe 4:
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Zu jedem $x \in V$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $(u, w) \in U \times W$ mit $x = u + w$ und wir definieren eine Abbildung $f : V \to V$, indem wir setzen $f(x) := w$. Diese Abbildung ist linear.

(i) Zeigen Sie, daß für jeden Eigenwerte $\lambda \in K$ von f gilt $\lambda \in \{0, 1\}$.

(ii) Geben Sie für jedes $\lambda \in \{0, 1\}$ den Eigenraum $\mathrm{Eig}(f; \lambda)$ an.

(iii) Sei V endlich erzeugt. Geben sie das Polynom cp_f an.