Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

3.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n \times n, R)$, so daß für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt $a_{ii} = a_{i,i+1} = \ldots = a_{in}$ und $a_{ii} = a_{i+1,i} = \ldots = a_{ni}$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\det A = a_{11}(a_{22} - a_{11})(a_{33} - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - a_{n-1,n-1})$$

Sind V und W Vektorräume über Körper K, so wird die Menge $V \times W$ durch komponentenweise Addition und komponentenweise Skalarenmultiplikation zu einem K-Vektorraum.

Aufgabe 2:
Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und S, T Untervektorräume von V. Dann haben wir die K-Vektorräume V/S und V/T und somit, wie eben angegeben, den K-Vektorraum $V/S \times V/T$. Betrachtet wird die Abbildung

$$f : V \to V/S \times V/T,\ a \mapsto (a + S, a + T)$$

Zeigen Sie

(i) f ist linear.
(ii) f ist injektiv genau dann, wenn $S \cap T = \{0\}$.
(iii) f ist surjektiv genau dann, wenn $S + T = V$.

Aufgabe 3:

(i) Seien S und T Untervektorräume eines Vektorraums V. Dann haben wir den Untervektorraum $S + T$ von V und die lineare Abbildung

$$f : S \to S + T,\ x \mapsto x.$$

Für den Untervektorraum $S \cap T$ von S und den Untervektorraum T von $S+T$ gilt $f(S \cap T) \subseteq T$. Deshalb erhalten wir gemäß V, §3, Beispiel 9 die lineare Abbildung

$$\overline{f} : S/(S \cap T) \to (S + T)/T,\ x + (S \cap T) \mapsto f(x) + T.$$

Zeigen Sie, daß $\overline{f}$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Geben Sie mit Hilfe der Aussage von (i) einen neuen Beweis der Dimensionsformel für Untervektorräume.

Sei K ein Körper. Für jedes $h \in K[X]$ setze $h^0 := 1 \in K[X]$. Für eine Familie $(n_a)_{a \in K}$ in $\mathbb{N}_0$ mit Indexmenge K (d.h. zu jedem $a \in K$ ist ein $n_a \in \mathbb{N}_0$ gegeben), so daß die Menge $L := \{a \in K \mid n_a \neq 0\}$ endlich ist, definiert man ein Polynom $\prod_{a \in K}(X - a)^{n_a} \in K[X]$ auf die offensichtliche Weise, nämlich wähle eine endliche nichtleere Teilmenge L' von K mit $L \subseteq L'$ und setze $\prod_{a \in K}(X - a)^{n_a} := \prod_{a \in L'}(X - a)^{n_a}$. (Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von L'). Mit dieser Definition und der Definition von $\nu(a, f)$ auf Übungsblatt 2 können wir V, §2, Proposition 12 aus der Vorlesung umformulieren zu

Zu jedem $f \in K[X] - \{0\}$ gibt es ein Polynom $t_f \in K[X]$ und eine Familie $(n_a)_{a\in K}$ in $\mathbb{N}_0$, so daß t_f keine Nullstellen in K hat und die Menge $\{a \in K \mid n_a \neq 0\}$ endlich ist und

$$f = t_f \cdot \prod_{a\in K} (X-a)^{n_a}.$$

Das Polynom t_f und die Familie $(n_a)_{a\in K}$ sind eindeutig bestimmt. Es ist $n_a = \nu(a, f)$ für jedes $a \in K$.

Ein Polynom $f \in K[X] - \{0\}$ zerfällt über K in Linearfaktoren (wie in V, §2, Definition 14 der Vorlesung definiert) genau dann, wenn t_f ein konstantes Polynom ist.

Auf Übungsblatt 2 ist die Teilbarkeit $a|b$ für Elemente a, b des Ring $K[X]$ definiert.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper. Zeigen Sie

(i) Für $f, g \in K[X] - \{0\}$ gilt $t_{fg} = t_f \cdot t_g$.

(ii) Für $f, g \in K[X] - \{0\}$ sind äquivalent
- (a) $g|f$
- (b) $t_g|t_f$ und $\nu(a, g) \leq \nu(a, f)$ für jedes $a \in K$.
- (c) g hat eine Darstellung $g = t \cdot \prod_{a\in K}(X-a)^{n_a}$ mit $t \in K[X]$ ein Teiler von t_f und $n_a \in \{0, 1, \ldots, \nu(a, f)\}$ für jedes $a \in K$.

(iii) Sind $f, g \in K[X] - \{0\}$ mit $g|f$ und zerfällt f über K in Linearfaktoren, so zerfällt auch g über K in Linearfaktoren.