Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

2.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und $m, n \in \mathbb{N}$. Seien $A \in M(m \times m, R)$, $B \in M(m \times n, R)$, $C = 0 \in M(n \times m, R)$ und $D \in M(n \times n, R)$. Setze

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M((m+n) \times (m+n), R).$$

Zeigen Sie, daß

$$\det(F) = \det(A) \cdot \det(D).$$

Aufgabe 2:
Seien V ein Vektorraum über einem Körper K und U und W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$. Seien $\mathcal{A} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U^m$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in W^n$ Basen von U und W. Dann ist $\mathcal{C} := (u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n) \in V^{m+n}$ eine Basis von V. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie

Gilt $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$ und sind $f_U : U \to U$ und $f_W : W \to W$ die Restriktionen von f, so hat $M_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}}$ die Gestalt

$$M_{f,\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M((m+n) \times (m+n), K)$$

mit $A = M_{f_U,\mathcal{A},\mathcal{A}} \in M(m \times m, K)$, $D = M_{f_W,\mathcal{B},\mathcal{B}} \in M(n \times n, K)$, $B = 0 \in M(m \times n, K)$, $C = 0 \in M(n \times m, K)$.

Aufgabe 3:
Für ein Polynom $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ bezeichnet $\overline{f} \in \mathbb{C}[X]$ das Polynom, das durch Konjugation der Koeffizienten von f ensteht, also

$$\overline{f} = \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \overline{a_2} X^2 + \ldots + \overline{a_n} X^n \in \mathbb{C}[X]$$

Zeigen Sie

(i) Ein $a \in \mathbb{C}$ ist eine Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[X]$ genau dann, wenn $\overline{a} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $\overline{f} \in \mathbb{C}[X]$ ist.
(ii) Die Abbildung $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X], f \mapsto \overline{f}$ ist ein Ringhomomorphismus.
(iii) Ist ein $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$, so stimmt die Vielfachheit von a in f mit der Vielfachheit von $\overline{a}$ in $\overline{f}$ überein.

Für einen Körper K und ein Polynom $f \in K[X] - \{0\}$ und $a \in K$ definiert man $\nu(a, f) \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\nu(a, f) := \begin{cases} m & \text{falls } f(a) = 0 \\ 0 & \text{falls } f(a) \neq 0 \end{cases}$$

wobei m die Vielfachheit der Nullstelle a in f ist.

Sind a, b Elemente eines kommutativen Rings A, so heißt a Teiler von b, geschrieben $a|b$, wenn es ein $c \in A$ mit $ac = b$ gibt.

Aufgabe 4:
Seien K ein Körper, $a \in K$ und $f, g \in K[X] - \{0\}$. Zeigen Sie

(i) $\nu(a, fg) = \nu(a, f) + \nu(a, g)$.
(ii) Ist $f|g$, so gilt $\nu(a, f) \leq \nu(a, g)$.