Lineare Algebra II

13.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Zeigen Sie

(i) Ein 2-dimensionaler symmetrischer bilinearer Raum (V, b) über einem Körper K mit $b \neq 0$ hat eine Orthogonalbasis genau dann, wenn es ein $v \in V$ mit $b(v, v) \neq 0$ gibt.

(ii) Ist K ein Körper mit $1 + 1 = 0$, so hat der symmetrische bilineare Raum (K^2, b) über K mit
$$b : K^2 \times K^2 \to K, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$$
keine Orthogonalbasis.

Aufgabe 2:
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ wird die symmetrische Bilinearform $b := B_{A,\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
betrachtet. Bestimmen Sie

- $\dim_+(\mathbb{R}^4, b)$, $\dim_-(\mathbb{R}^4, b)$ und $\dim_0(\mathbb{R}^4, b)$
- Untervektorräume U_+, U_-, U_0 von $\mathbb{R}^4$, so daß $(\mathbb{R}^4, b) = U_+ \perp U_- \perp U_0$ und $b|U_+$ positiv definit, $b|U_-$ negativ definit, $b|U_0 = 0$
- eine Orthogonalbasis (v_1, v_2, v_3, v_4) von $(\mathbb{R}^4, b)$ mit $b(v_i, v_i) \in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, daß zwei endliche erzeugte symmetrische bilineare Räume (V, b) und (V', b') über $\mathbb{R}$ genau dann isometrisch sind, wenn für jedes $i \in \{+, -, 0\}$ gilt $\dim_i(V, b) = \dim_i(V', b')$.

Aufgabe 4:

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, daß A genau dann positiv definit ist, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $A = {}^tS \cdot S$ gibt.

(ii) Welche Definitheitseigenschaften (postiv semidefinit, positiv definit, negativ semidefinit, negativ definit, indefinit) hat die Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\in M(3 \times 3, \mathbb{R})$?