Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

12.Übungsblatt

Zu Klausur und Nachklausur müssen Sie sich beim Prüfungsamt anmelden. Studieren Sie in einem Fach mit beschränkt wiederholbarer schriftlicher Prüfung zu Lineare Algebra II, so müssen Sie sich mit einem Formular beim Prüfungsamt anmelden. Studieren Sie in einem Fach mit unbeschränkt wiederholbarer schriftlicher Prüfung zu Lineare Algebra II, so müssen Sie sich über Wusel beim Prüfungsamt anmelden. Für Anmeldung über Wusel gelten die folgenden Fristen

Klausur:	Nachklausur:
Anmeldebeginn 10.01.2020	Anmeldebeginn 24.02.2020
Anmeldeende 24.01.2020	Anmeldeende 07.03.2020
Rücktrittsende 31.01.2020	Rücktrittsende 07.03.2020

Aufgabe 1:
Die Abbildung $b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$,

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_3 - ix_3y_2 + 6x_3y_3$$

ist eine Bilinearform des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$.

(i) Bestimmen Sie die Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$, so daß für alle $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$ gilt:

$$b(x, y) = (x_1\ \ x_2\ \ x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Das Tripel (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (i, 0, 1)$, $v_3 = (0, 2, 1)$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie die Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$, so daß für alle $x = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, $y = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 \in \mathbb{C}^3$ gilt

$$b(x, y) = (x_1\ \ x_2\ \ x_3) \cdot B \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Ist b symmetrisch? Ist b antisymmetrisch? Ist b nicht ausgeartet?

Aufgabe 2:
Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $b : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Sei U ein Untervektorraum von V mit $U \subseteq \mathrm{Rad}(V, b)$. Zeigen Sie

(i) Es gibt eine Abbildung $\bar{b} : V/U \times V/U \to K$, so daß für alle $x, y \in V$ gilt $\bar{b}(x + U, y + U) = b(x, y)$.

(ii) $\bar{b}$ ist eine symmetrische Bilinearform des K-Vektorraums V/U.

(iii) $\bar{b}$ ist nicht ausgeartet genau dann, wenn $U = \mathrm{Rad}(V, b)$.

Aufgabe 3:
Seien (V, b) ein endlich erzeugter symmetrischer (oder antisymmetrischer) bilinearer Raum über einem Körper K und U, W Untervektorräume von V, so daß $V = U \perp W$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{rk}(b) = \mathrm{rk}(b|U) + \mathrm{rk}(b|W)$. (Hinweis. Fügen Sie Basen von U und W zu einer Basis von V zusammen).

Aufgabe 4:
Seien (V, b) ein endlich erzeugter symmetrischer (oder antisymmetrischer) bilinearer Raum. Zeigen Sie

(i) Es gibt Untervektorräume U, W von V, so daß $V = U \perp W$ und $b|U$ nicht ausgeartet ist und $b|W = 0$.

(ii) Sind U, W Untervektorräume von V, so daß $V = U \perp W$ und $b|U$ nicht ausgeartet ist und $b|W = 0$, so ist $W = \mathrm{Rad}(V, b)$.

(iii) $\dim V = \mathrm{rk}(b) + \dim \mathrm{Rad}(V, b)$.