**Huber, Linden** **WS 2019/2020**

## Lineare Algebra II

### 11.Übungsblatt

**Aufgabe 1:**
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum und $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie

**(i)** Es ist $f = g$ genau dann, wenn für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, f(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.

**(ii)** $f$ ist normal genau dann, wenn für alle $x, y \in V$ gilt $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f^{\mathrm{ad}}(x), f^{\mathrm{ad}}(y)\rangle$.

**(iii)** Sind $f$ und $g$ selbstadjungiert, so ist $f \circ g$ selbstadjungiert genau dann, wenn $f \circ g = g \circ f$.

**Aufgabe 2:**
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, daß äquivalent sind

**(i)** $f$ ist normal und diagonalisierbar.

**(ii)** $f$ ist selbstadjungiert.

**Aufgabe 3:**
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum. Zeigen Sie

**(i)** Ist $f \in \operatorname{End}(V)$, so ist der Endomorphismus $f \circ f^{\mathrm{ad}} \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert und für jeden Eigenwert $\lambda$ von $f \circ f^{\mathrm{ad}}$ gilt $\lambda \in [0, \infty[$.

**(ii)** Ist $g \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert mit $\lambda \in [0, \infty[$ für jeden Eigenwert $\lambda$ von $g$, so gibt es genau einen selbstadjungierten Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\lambda \in [0, \infty[$ für jeden Eigenwert $\lambda$ von $f$ und $g = f^2$.

(Hinweis zu (i). Betrachten Sie $\lambda\langle x, x\rangle$ für einen Eigenvektor $x$ zu $\lambda$).

**Aufgabe 4:**
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$
Begründen Sie, daß es eine orthogonale Matrix $T \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ mit $D = T^{-1}AT$ gibt. Bestimmen Sie solche Matrizen $T$ und $D$.