Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

10.Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien $n \in \mathbb{N}$, $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $w_1, \ldots, w_n \in W$. Betrachtet wird die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to W, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 w_1 + \ldots + x_n w_n$. Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$g : W \to \mathbb{C}^n, \quad w \mapsto (\langle w_1, w \rangle, \ldots, \langle w_n, w \rangle)$$

linear ist und die zu f adjungierte lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2:
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und $g \in \mathrm{End}(V)$. Betrachtet wird $g^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie

(i) Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ das charakteristische Polynom von g, so ist $\overline{f} \in \mathbb{C}[X]$ das charakteristische Polynom von g^{ad}. (Dabei ist $\overline{f}$ wie in Übungsblatt 2, Aufgabe 3 definiert).

(ii) Ist $L \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte von g, so ist $\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in L\}$ die Menge der Eigenwerte von g^{ad}.

Aufgabe 3:
Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = 3$. Sei $f : (V\langle\ ,\ \rangle) \to (V, \langle\ ,\ \rangle)$ eine orthogonale lineare Abbildung mit $\det f = 1$ und $f \neq \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie

(i) Der Untervektorraum $U := \mathrm{Eig}(f; 1)$ von V ist 1-dimensional.

(ii) Der Untervektorraum $W := U^{\perp}$ von V ist 2-dimensional und f-invariant und der Endomorphismus $g := f|W : W \to W$ ist orthogonal mit $\det g = 1$.

(iii) Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ und ein $\alpha \in [0, 2\pi[$, so daß

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Man nennt f eine *Drehung von* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *mit Drehachse* U *und Winkel* α. Können Sie diese Bezeichnung geometrisch nachvollziehen?

Aufgabe 4:
Setze

$$A := \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \subseteq M(3 \times 3, \mathbb{C})$$

(i) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ versehen. Sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung $f := L_{A,\mathcal{A},\mathcal{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ orthogonal ist und $\det f = 1$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ und ein $\alpha \in [0, 2\pi[$, so daß

$$M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ versehen. Sei $\mathcal{C}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$. Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung $g := L_{A,\mathcal{C},\mathcal{C}} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ unitär ist. Begründen Sie, daß es eine Orthonormalbasis $\mathcal{D}$ von $(\mathbb{C}^3, \langle\ ,\ \rangle)$ gibt, so daß $M_{g,\mathcal{D},\mathcal{D}}$ eine Diagonalmatrix ist. Bestimmen Sie solch eine Basis $\mathcal{D}$.