Huber, Linden **WS 2019/2020**

Lineare Algebra II

1.Übungsblatt

Es gibt zwei Übungsgruppen

Montag 8-10 Uhr in G.16.09, Abgabe in Postfach 62
Montag 12-14 Uhr in F.12.11, Abgabe in Postfach 11

Die Ausarbeitungen der Übungsaufgaben sind als Einzelabgaben einzureichen. Abgabe bis donnerstags 10 Uhr.

Aufgabe 1:
Seien R ein kommutativer Ring mit Einselement, $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_0, c_1, \ldots, c_n, \lambda \in R$. Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n+1} \in M((n+1) \times (n+1), R)$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{wenn } i = j \text{ und } j \neq n+1 \\ c_{i-1} & \text{wenn } j = n+1 \\ -1 & \text{wenn } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \ldots & \vdots & \vdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & c_n \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß gilt

$$\det A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$$

In Lineare Algebra I, Chapter IV, §2 wurde für einen kommutativen Ring mit Einselement $(R, +, \cdot)$ und $n \in \mathbb{N}$ der Ring mit Einselement $(M(n \times n, R), +, \cdot)$ eingeführt.

Aufgabe 2:
Seien R und S kommutative Ringe mit Einselement, $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, R)$ setze $F(A) := (f(a_{ij})) \in M(n \times n, S)$. Zeigen Sie

(i) Die Abbildung $M(n \times n, R) \to M(n \times n, S), A \mapsto F(A)$ ist ein Homomorphismus zwischen den Ringen $(M(n \times n, R), +, \cdot)$ und $(M(n \times n, S), +, \cdot)$.

(ii) Für jedes $A \in M(n \times n, R)$ gilt $\det F(A) = f(\det A)$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie

(i) Die Teilmenge $S := \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ von $M(2\times 2, \mathbb{R})$ ist ein Unterring des Rings $(M(2 \times 2, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

(ii) Die Abbildung $\mathbb{C} \to S, a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, daß es zu jedem $x \in \mathbb{C}$ ein $y \in \mathbb{C}$ mit $x = y^2$ gibt.