Prof. Dr. R. Huber
G. Linden

WiSe 2019/20

Lösungshinweise zur Nachklausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1: $(8 + 5 + 8 + 4 = 25$ Punkte)

(i) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix über einem Körper K. Geben Sie die Definition des charakteristischen Polynoms cp_A von A.
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über K und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Geben Sie die Definition des charakteristischen Polynoms cp_f von f.
Geben Sie cp_f im Fall an, dass f nilpotent ist.

(ii) Formulieren Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

(iii) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Geben Sie die Definition eines Skalarproduktes auf V.

(iv) Seien (V, b) und (V', b') zwei symmetrische bilineare Räume über einem Körper K. Geben Sie die Definition einer Isometrie von (V, b) nach (V', b').

Aufgabe 2: $(5+5+5+5=20$ Punkte)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) Ist V ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar, so ist $\mathrm{Eig}(f;\lambda) = \mathrm{Eig}(f^2;\lambda^2)$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Ist $(V, \langle\, ,\rangle)$ ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein unitärer Endomorphismus, so ist f surjektiv.

(iii) Ist $(V, \langle\, ,\rangle)$ ein unitärer Vektorraum und sind U, W Untervektorräume von V mit $U \perp W$, so ist $U \cap W = \{0\}$.

(iv) Sind (V, b) und (V', b') symmetrische bilineare Räume über einem Körper K, die isometrisch sind, so gilt $\dim \mathrm{Rad}(V, b) = \dim \mathrm{Rad}(V', b')$.

Lösung:

ad (i): Falsch: Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 - x_2e_2\ , \text{ für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\mathrm{Eig}(f;1) = \langle e_1\rangle$, aber $\mathrm{Eig}(f^2;1) = \mathbb{R}^2$, da $f^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

ad (ii): Wahr: Nach der Vorlesung ist eine unitäre lineare Abbildung injektiv. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist ein injektiver Endomorphismus endlich-dimensionaler Vektorräume auch surjektiv.

ad (iii): Wahr: Sei $v \in U \cap W$. Wegen $U \perp W$ gilt $U \ni v \perp v \in W$, also $\langle v, v\rangle = 0$. Weil $\langle\, ,\rangle$ positiv-definit ist, folgt, dass $v = 0$. Somit ist $U \cap W = \{0\}$.

ad (iv): Wahr: Sei $\varphi\colon (V, b) \to (V', b')$ eine Isometrie. Für $v \in V$ gilt wegen $b'(\varphi(v), \varphi(w)) = b(v, w)$, für alle $w \in V$:

$$\begin{aligned}
v \in \mathrm{Rad}(V, b) &\Leftrightarrow \forall w \in V : b(v, w) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall w \in V : b'(\varphi(v), \varphi(w)) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall w' \in V' : b'(\varphi(v), \varphi(\varphi^{-1}(w')) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall w' \in V' : b'(\varphi(v), w') = 0\\
&\Leftrightarrow \varphi(v) \in \mathrm{Rad}(V', b')\,.
\end{aligned}$$

Also gilt $\varphi(\mathrm{Rad}(V, b)) = \mathrm{Rad}(V', b')$. Da φ als Isometrie per Definition insbesondere ein Isomorphismus ist, ist

$$\varphi|_{\mathrm{Rad}(V,b)}\colon \mathrm{Rad}(V, b) \longrightarrow \mathrm{Rad}(V', b')$$

ein Isomorphismus. Es folgt $\dim \mathrm{Rad}(V, b) = \dim \mathrm{Rad}(V', b')$.

Aufgabe 3: (20 Punkte)
Betrachtet wird der Endomorphismus

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) &\longmapsto (-2x_1+x_3,\ -x_2,\ -x_1-x_2,\ x_1-x_3-x_4)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ gibt, so dass $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Bestimmen Sie so eine Basis $\mathcal{A}$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$.

Lösung:
Wir entnehmen der Definition von f, dass für die Standardbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$ gilt:

$$M := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (1 Punkt).}$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom von f (2 Punkte):

$$\begin{aligned} \mathrm{cp}_f = \det(XE_4 - M) &= \det \begin{pmatrix} X+2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ -1 & 0 & 1 & X+1 \end{pmatrix} \\ &= (X+1)\cdot\det\begin{pmatrix} X+2 & 0 & -1 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \\ &= (X+1)\left((X+1)\cdot\det\begin{pmatrix} X+2 & -1 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} X+2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (X+1)\big((X+1)(X^2+2X) + (X+2-1)\big) \\ &= (X+1)^2(X^2+2X+1) \\ &= (X+1)^4\,. \end{aligned}$$

Also ist $\lambda = -1$ der einzige Eigenwert von f (1 Punkt).

Wir berechnen eine Basis von $\mathrm{Eig}(f;-1)$ (2 Punkte):

$$M + E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $U_1 := \mathrm{Eig}(f;-1) = \langle e_1 + e_3, e_4\rangle$.

Nun bestimmen wir eine Basis von $\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$. Es gilt (2 Punkte):

$$(M+E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $U_2 := \ker(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle e_1, e_3, e_4\rangle$ (1 Punkt).

Da nach der Vorlesung $\dim\ker(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^3 > \dim\ker(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = 3$ ist, muss $U_3 := \ker(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^3 = \mathbb{R}^4$ sein (1 Punkt).

Um eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$ zu bestimmen, für die $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ Jordansche Normalform hat, wenden wir das Schema aus der Vorlesung an (5 Punkte für richtige $\mathcal{A}_i$):
Wir setzen $\mathcal{A}_3 = (e_2)$, sodass $U_3 = U_2 \oplus \langle\mathcal{A}_3\rangle$ ist.
Dann ist $(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(\mathcal{A}_3) = -e_3$. Wir setzen $\mathcal{A}_2 = (-e_3)$, sodass $U_2 = U_1 \oplus \langle\mathcal{A}_2\rangle$ ist.
Dann ist $(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(\mathcal{A}_2) = -e_1 - e_3 + e_4$. Wir ergänzen $(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(\mathcal{A}_2)$ um e_4 zu $\mathcal{A}_1 = (-e_1 - e_3 + e_4, e_4)$, welches eine Basis von U_1 ist.

Durch Auslesen des Schemas

$$\begin{array}{c|ll} \mathcal{A}_3 & e_2 & \\ \mathcal{A}_2 & -e_3 - e_2 + e_4 & \\ \mathcal{A}_1 & -e_1 - e_3 + e_4 & e_4 \end{array}$$

erhalten wir die Basis $\mathcal{A} = (-e_1 - e_3 + e_4, -e_3, e_2, e_4)$ (3 Punkte), für die

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (2 Punkte)}$$

Jordansche Normalform hat.

Aufgabe 4: (15 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $A_n = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{, falls } i = j, \\ 1 & \text{, falls } i+1 = j \text{ oder, falls } i = n \text{ und } j = 1, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Also:

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\det(A_n) = \lambda^n + (-1)^{n+1}$.

Lösung:
Wir entwickeln A_n nach der ersten Spalte:

$$\det(A_n) = \lambda(-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} + 1(-1)^{n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \lambda^{n-1} + (-1)^{n+1} 1^{n-1}$$

$$= \lambda^n + (-1)^{n+1}$$

Aufgabe 5: $(5 + 9 + 6 + 5 = 25$ Punkte)
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ wird die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -x_1y_1 + 2x_1y_3 + x_2y_2 + 2x_3y_1 - x_3y_3$$

betrachtet.

(i) Sei $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrix $M_{b,\mathcal{A}}$ (mit Begründung). Zeigen Sie, dass b symmetrisch ist.

(ii) Bestimmen Sie Untervektorräume U_+, U_-, U_0 von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathbb{R}^3 = U_+ \perp U_- \perp U_0$ bezüglich b ist, $b|_{U_+}$ positiv definit, $b|_{U_-}$ negativ definit und $b|_{U_0} = 0$ ist. (Sofern $U_i \neq \{0\}$ ist, so ist U_i durch Angabe einer Basis anzugeben, für $i \in \{+, -, 0\}$.)

(iii) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, für die $M_{b,\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\{1, -1, 0\}$ ist, und geben Sie $M_{b,\mathcal{B}}$ an.

(iv) Ist b indefinit?

Lösung:

ad (i): Nach der Vorlesung gilt für $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$

$$M_{b,\mathcal{A}} = (b(e_i, e_j))_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach der Vorlesung ist b genau dann symmetrisch, wenn die Matrix $M_{b,\mathcal{A}}$ symmetrisch ist, was sie ist.

ad (ii): Wir benutzen den Satz über die Hauptachsentransformation aus der Vorlesung. Dazu bestimmen wir zuerst eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von $f := L_{M_{b,\mathcal{A}},\mathcal{A},\mathcal{A}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{cp}_f = \det(XE_3 - M_{b,\mathcal{A}}) &= \det \begin{pmatrix} X+1 & 0 & -2 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -2 & 0 & X+1 \end{pmatrix} \\
&= (X-1) \cdot \det \begin{pmatrix} X+1 & -2 \\ -2 & X+1 \end{pmatrix} \\
&= (X-1)((X+1)^2 - 4) \\
&= (X-1)(X^2 + 2X - 3) \\
&= (X-1)(X-1)(X+3)
\end{aligned}$$

Somit sind $\lambda = 1$ und $\lambda = -3$ die Eigenwerte von f.

Für $\lambda = 1$ berechnen wir den Eigenraum von f:

$$M_{b,\mathcal{A}} - E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Eig}(f; 1) = \langle e_2, e_1 + e_3 \rangle$.

Für $\lambda = -3$ berechnen wir den Eigenraum von f:

$$M_{b,\mathcal{A}} + 3E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist $\mathrm{Eig}(f; -3) = \langle e_1 - e_3 \rangle$.

Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von f orthogonal zueinander sind und auch $e_2 \perp e_1 + e_3$ gilt, ist $(e_2, e_1 + e_3, e_1 - e_3)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation erfüllen dann die Unterräume

$$U_+ := \operatorname{Eig}(f;1) = \langle e_2, e_1 + e_3\rangle$$
$$U_- := \operatorname{Eig}(f;-3) = \langle e_1 - e_3\rangle$$
$$U_0 := \operatorname{Eig}(f;0) = \{0\}$$

die geforderten Bedingungen.

ad (iii): Nach der Vorlesung können wir durch Normieren aus der Orthogonalbasis (e_2, e_1+e_3, e_1-e_3) von $(\mathbb{R}^3, b)$ aus (ii) die gesuchte Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ erhalten:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{b(e_2,e_2)}} e_2 = e_2$$
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{b(e_1+e_3, e_1+e_3)}}(e_1+e_3) = \frac{1}{\sqrt{1\langle e_1+e_3, e_1+e_3\rangle}}(e_1+e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)$$
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{-b(e_1-e_3, e_1-e_3)}}(e_1-e_3) = \frac{1}{\sqrt{-(-3)\langle e_1-e_3, e_1-e_3\rangle}}(e_1-e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1-e_3)$$

Dann gilt

$$M_{b,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ad (iv): Ja, b ist indefinit: Es gibt $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $b(v_2,v_2) = 1 > 0$ und $b(v_3,v_3) = -1 < 0$.

Aufgabe 6: $(5 + 6 + 4 = 15$ Punkte)
Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Betrachtet wird die Abbildung

$$b \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad b(x,y) = \langle x, f(y)\rangle\,.$$

Zeigen Sie:

(i) b ist bilinear.
(ii) Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $(V, \langle\,,\rangle)$ gilt: $M_{b,\mathcal{A}} = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$.
(iii) b ist genau dann nicht ausgeartet, wenn f ein Isomorphismus ist.

Lösung:

ad (i): Wir überprüfen die Linearität in beiden Komponenten: Seien $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt, da f linear und $\langle\,,\rangle$ bilinear ist:

$$\begin{aligned}
b(v+v', w) &= \langle v+v', f(w)\rangle = \langle v, f(w)\rangle + \langle v', f(w)\rangle = b(v,w) + b(v',w)\\
b(\lambda v, w) &= \langle \lambda v, f(w)\rangle = \lambda\langle v, f(w)\rangle = \lambda b(v,w)\\
b(v, w+w') &= \langle v, f(w+w')\rangle = \langle v, f(w)+f(w')\rangle = \langle v, f(w)\rangle + \langle v, f(w')\rangle = b(v,w) + b(v,w')\\
b(v, \lambda w) &= \langle v, f(\lambda w)\rangle = \langle v, \lambda f(w)\rangle = \lambda\langle v, f(w)\rangle = \lambda b(v,w)\,.
\end{aligned}$$

ad (ii): Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $(V, \langle\,,\rangle)$. Sei $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, d.h.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
M_{b,\mathcal{A}} &= \left(b(v_i, v_j)\right)_{i,j=1,\ldots,n}\\
&= \left(\langle v_i, f(v_j)\rangle\right)_{i,j=1,\ldots,n}\\
&= \left(\langle v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k\rangle\right)_{i,j=1,\ldots,n}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle v_i, v_k\rangle\right)_{i,j=1,\ldots,n}\\
&= \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\\
&= M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}\,.
\end{aligned}$$

ad (iii): Nach der Vorlesung ist b genau dann nicht ausgeartet, wenn $M_{b,\mathcal{A}}$ invertierbar ist. Außerdem ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ invertierbar ist. Wegen $M_{b,\mathcal{A}} = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ aus (ii) folgt somit die Behauptung.