Prof. Dr. R. Huber
G. Linden WiSe 2019/20

**Lösungshinweise zur Klausur Lineare Algebra II**

**Aufgabe 1:** $(7 + 5 + 5 + 8 = 25$ Punkte)

**(i)** Seien $K$ ein Körper, $p \in K[X] \setminus \{0\}$ und $a \in K$ eine Nullstelle von $p$. Geben Sie die Definition der Vielfachheit von $a$ in $p$.
Seien $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f$. Welche Gleichheiten oder Ungleichheiten bestehen im Allgemeinen zwischen den drei natürlichen Zahlen

$$\dim \mathrm{Eig}(f; \lambda)\,, \qquad \dim \mathrm{E}(f; \lambda)\,, \qquad \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ in } \mathrm{cp}_f \quad ?$$

**(ii)** Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix. Geben Sie die Definition einer unitären Matrix.

**(iii)** Seien $(V, \langle\,,\rangle_V)$ und $(W, \langle\,,\rangle_W)$ endlich erzeugte euklidische Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine linear Abbildung. Geben Sie die Definition der zu $f$ adjungierten linearen Abbildung $f^{\mathrm{ad}}$.

**(iv)** Sei $(V, b)$ ein endlich erzeugter symmetrischer bilinearer Raum über $\mathbb{R}$. Geben Sie die Definition von $\dim_-(V, b)$.
Formulieren Sie die beiden Sätze aus der Vorlesung, die diese Definition ermöglichen.

**Aufgabe 2:** $(5+5+5+5=20$ Punkte)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

**(i)** Jede obere Dreiecksmatrix $M \in M(n \times n, K)$, für einen Körper $K$ und $n \in \mathbb{N}$, ist ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform.

**(ii)** Ist $V = U + W$, für einen Vektorraum $V$ und Untervektorräume $U, W \subseteq V$, so ist $V/U = \{x + U \mid x \in W\}$.

**(iii)** Sei $(V, b)$ ein symmetrischer bilinearer Raum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Dann gilt $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

**(iv)** Sind $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ positiv definite symmetrische Matrizen, so ist auch die symmetrische Matrix $A + B$ positiv definit.

**Lösung:**

**ad (i):** Wahr. Falls $M \in M(n \times n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist, so ist $\mathrm{cp}_M = \det(XE_n - M) = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n)$. Also zerfällt $\mathrm{cp}_M$ über $K$ in Linearfaktoren, was nach der Vorlesung äquivalent dazu ist, dass $M$ ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform ist.

**ad (ii):** Wahr. Nach Definition ist $V/U = \{x + U \mid x \in V\}$, also ist die Inklusion $\{x + U \mid x \in W\} \subseteq V/U$ klar. Sei nun $y + U \in V/U$. Da $V = U + W$ ist, existieren $u \in U$ und $w \in W$ mit $y = u + w$. Also ist

$$y + U = u + w + U = w + U \in \{x + U \mid x \in W\} .$$

Es folgt $V/U = \{x + U \mid x \in W\}$.

**ad (iii):** Wahr. Sei zuerst $x \in (U + W)^{\perp}$. Für $u \in U$ gilt dann $b(x, u) = 0$, da $U \subseteq U + W$ ist. Somit ist $x \in U^{\perp}$. Analog sehen wir, dass $x \in W^{\perp}$ gilt, und somit $(U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Sei nun $x \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Für $y \in U + W$ seien $u \in U$ und $w \in W$ mit $y = u + w$. Dann gilt

$$b(x, y) = b(x, u + w) = b(x, u) + b(x, w) = 0$$

wegen $x \in U^{\perp}$ und $x \in W^{\perp}$. Somit gilt auch $U^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq (U + W)^{\perp}$.

**ad (iv):** Wahr. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt: $x \cdot S \cdot {}^t x > 0$. Für $A, B$ positiv definit gilt nun (nach dem Distributivgesetz für Matrizenmultiplikation), für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot (A + B) \cdot {}^t x = (x \cdot A + x \cdot B) \cdot {}^t x = x \cdot A \cdot {}^t x + x \cdot B \cdot {}^t x > 0 ,$$

also ist auch $A + B$ positiv definit.

**Aufgabe 3:** (20 Punkte)
Betrachtet wird der Endomorphismus

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^4 &\longrightarrow \mathbb{Q}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto (3x_1 - x_3,\ 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_3,\ -x_1 + x_3 + 2x_4)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{Q}^4$ gibt, so dass $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist. Bestimmen Sie so eine Basis $\mathcal{A}$ und die Matrix $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$.

**Lösung:**
Wir entnehmen der Definition von $f$, dass für die Standardbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{Q}^4$ gilt:

$$M := M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (1 Punkt).}$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom von $f$ (2 Punkte):

$$\begin{aligned} \mathrm{cp}_f &= \det(XE_4 - M) = \det \begin{pmatrix} X-3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & X-2 \end{pmatrix} \\ &= (X-2) \cdot \det \begin{pmatrix} X-3 & 1 & 0 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{pmatrix} \\ &= (X-2)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} X-3 & 1 \\ -1 & X-1 \end{pmatrix} \\ &= (X-2)^2 \cdot ((X-3)(X-1) - (-1)) = (X-2)^2 \cdot (X^2 - 3X - X + 3 + 1) \\ &= (X-2)^4\,. \end{aligned}$$

Also ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert von $f$ (1 Punkt).

Wir berechnen eine Basis von $\mathrm{Eig}(f;2)$ (2 Punkte):

$$M - 2E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $U_1 := \mathrm{Eig}(f;2) = \langle e_2, e_4 \rangle$.

Nun bestimmen wir eine Basis von $\ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})^2$. Es gilt (2 Punkte):

$$(M - 2E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist $U_2 := \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})^2 = \langle e_1 + e_3, e_2, e_4 \rangle$ (1 Punkt).

Da nach der Vorlesung $\dim \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})^3 > \dim \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})^2 = 3$ ist, muss $U_3 := \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})^3 = \mathbb{Q}^4$ sein (1 Punkt).

Um eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{Q}^4$ zu bestimmen, für die $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ Jordansche Normalform hat, wenden wir das Schema aus der Vorlesung an (5 Punkte für richtige $\mathcal{A}_i$):
Wir setzen $\mathcal{A}_3 = (e_1)$, sodass $U_3 = U_2 \oplus \langle \mathcal{A}_3 \rangle$ ist.
Dann ist $(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})(\mathcal{A}_3) = e_1 + e_3 - e_4$. Wir setzen $\mathcal{A}_2 = (e_1 + e_3 - e_4)$, sodass $U_2 = U_1 \oplus \langle \mathcal{A}_2 \rangle$ ist.
Dann ist $(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})(\mathcal{A}_2) = e_2$. Wir ergänzen $(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4})(\mathcal{A}_2)$ um $e_4$ zu $\mathcal{A}_1 = (e_2, e_4)$, welches eine Basis von $U_1$ ist.

Durch Auslesen des Schemas

$$\begin{array}{r|llll} \mathcal{A}_3 & e_1 & & & \\ \mathcal{A}_2 & e_1 + e_3 - e_4 & & & \\ \mathcal{A}_1 & e_2 & & & e_4 \end{array}$$

erhalten wir die Basis $\mathcal{A} = (e_2, e_1 + e_3 - e_4, e_1, e_4)$ (3 Punkte), für die

$$M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ (2 Punkte)}$$

Jordansche Normalform hat.

**Aufgabe 4:** (15 Punkte)
Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Einselement und $n \in \mathbb{N}$. Für $a \in R$ sei $A_n = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n \times n, R)$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} a & , \text{wenn } i+j = n+1, \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Also

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ 0 & 0 & \ldots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ a & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt: $\det(A_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n$.

**Lösung:**
Wir benutzten vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ (2 Punkte). Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt die Aussage (2 Punkte):

$$\det(A_1) = \det((a)) = a = (-1)^{\frac{1\cdot 0}{2}} a^1 .$$

Für den Induktionsschritt gelte nun die Aussage $\det(A_{n-1}) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a^{n-1}$ (1 Punkt). Wir entwickeln nun $\det(A_n)$ nach der ersten Spalte (5 Punkte):

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= (-1)^{n+1} a \cdot \det(A_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1} a \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a^{n-1} \\ &= (-1)^{\frac{2(n+1)+(n-1)(n-2)}{2}} a^n . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 2(n+1) + (n-1)(n-2) &= 2(2 + (n-1)) + (n-1)(n-2) \\ &= 2 \cdot 2 + 2(n-1) + (n-1)(n-2) \\ &= 4 + (n-1)(2 + (n-2)) \\ &= 4 + (n-1)n , \end{aligned}$$

also folgt (5 Punkte):

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= (-1)^{\frac{4+(n-1)n}{2}} a^n = (-1)^{2+\frac{(n-1)n}{2}} a^n = (-1)^2 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a^n . \end{aligned}$$

**Aufgabe 5:** $(5+8+12=25$ Punkte)
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ wird die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \frac{3}{2}x_1y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_2y_2 + x_3y_3$$

betrachtet.

**(i)** Bestimmen Sie die Matrix $S \in M(3\times 3,\mathbb{R})$, so dass

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

gilt, für alle $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

**(ii)** Zeigen Sie, dass $b$ ein Skalarprodukt ist, zum Beispiel mit Hilfe von $S$.

**(iii)** Wenden Sie das Gram-Schmidt–Orthogonalisierungsverfahren in dem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3,b)$ auf die Standardbasis $\mathcal{A}=(e_1,e_2,e_3)$ an, um eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^3,b)$ zu erhalten. Bestimmen Sie anschließend eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^3,b)$.

**Lösung:**

**ad (i):** Nach der Vorlesung gilt (2 Punkte)

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot S \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{3} s_{ij}x_iy_j\,,$$

für alle $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$, mit $S=(s_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Also folgt aus der Definition von $b(x,y)$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (3 Punkte).}$$

**ad (ii):** Um zu zeigen, dass $b$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist, müssen wir zeigen, dass $b$ bilinear, symmetrisch und positiv definit ist.
Die Bilinearität von $b$ gilt aber nach Voraussetzung (1 Punkt).
Nach der Vorlesung ist $b$ genau dann symmetrisch, wenn die assoziierte Matrix $S$ symmetrisch ist. Somit ist $b$ symmetrisch, da die in (i) berechnete Matrix $S$ symmetrisch ist (2 Punkte).
Nach der Vorlesung ist $b$ genau dann positiv definit, wenn die assoziierte Matrix $S$ positiv definit ist. Auch nach der Vorlesung ist eine symmetrische Matrix $S$ genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von $S$ positiv

sind (2 Punkte). Wir bestimmen also die Eigenwerte von $S$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{cp}_S = \det(XE_3 - S) &= \det \begin{pmatrix} X-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & X-\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix} \\
&= (X-1)\det \begin{pmatrix} X-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= (X-1)\left(\left(X-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\
&= (X-1)\left(X^2 - 2\cdot\frac{3}{2}X + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= (X-1)(X^2-3X+2) \\
&= (X-1)(X-2)(X-1)\,.
\end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ von $S$ positiv (3 Punkte) und $b$ damit positiv definit. (Genauso richtig ist es, dass Hauptminorenkriterium aus der Vorlesung zu verwenden. Auch hier gibt es 2 Punkte dafür, wie damit gezeigt werden kann, dass $b$ positiv definit ist und 3 Punkte für das richtige Bestimmen der Hauptminoren.)

**ad (iii):** Wir wollen mittels des Gram-Schmidt–Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $(\mathbb{R}^3, b)$ bestimmen.

$$v_1 = e_1 \qquad \text{(1 Punkt)}$$

$$v_2 = e_2 - \frac{b(v_1,e_2)}{b(v_1,v_1)}v_1 = e_2 - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}e_1 = \frac{1}{3}e_1 + e_2 \qquad \text{(3 Punkte)}$$

$$v_3 = e_3 - \frac{b(v_1,e_3)}{b(v_1,v_1)}v_1 - \frac{b(v_2,e_3)}{b(v_2,v_2)}v_2 = e_3 - \frac{0}{b(e_1,e_1)}e_1 - \frac{0}{b(v_2,v_2)}v_2 = e_3 \qquad \text{(4 Punkte).}$$

Nun normieren wir $\mathcal{B}$ noch, um eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von $(\mathbb{R}^3, b)$ zu erhalten (4 Punkte):

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{\sqrt{b(v_1,v_1)}}v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 && \text{(1 Punkt)} \\
w_2 &= \frac{1}{\sqrt{b(v_2,v_2)}}v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}b(e_1,e_1) + \frac{2}{3}b(e_1,e_2) + b(e_2,e_2)}}v_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}}v_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{6}}}v_2 \\
&= \sqrt{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{3}e_1 + e_2\right) && \text{(2 Punkte)} \\
w_3 &= \frac{1}{\sqrt{b(v_3,v_3)}}v_3 = \frac{1}{\sqrt{1}}e_3 = e_3 && \text{(1 Punkt).}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6:** $(7+8=15$ Punkte)
Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:

**(i)** Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ und sind $U, W$ $f$-invariante Untervektorräume von $V$ mit $V = U \perp W$ und sind $f|_U \colon U \to U$ und $f|_W \colon W \to W$ Isometrien, so ist $f$ eine Isometrie.

**(ii)** Ist $U$ ein Untervektorraum von $V$ und ist $g \in \operatorname{End}(U)$, so dass $g \colon U \to U$ eine Isometrie ist, so gibt es eine Isometrie $f$ von $V$, so dass $f|_U = g$.

**Lösung:**

**ad (i):** Es ist zu zeigen, dass $f$ ein Isomorphismus und orthogonal ist. Gemäß Vorlesung genügt es zu zeigen, dass $f$ orthogonal ist (da dann automatisch $f$ injektiv und somit ein Isomorphismus ist). Also ist zu zeigen, dass für alle $v, v' \in V$ gilt: $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$.
Wegen $V = U \perp W$ existieren $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ mit $v = u + w$ und $v' = u' + w'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle f(v), f(v')\rangle &= \langle f(u+w), f(u'+w')\rangle = \langle f(u)+f(w), f(u')+f(w')\rangle \\ &= \langle f(u), f(u')\rangle + \langle f(u), f(w')\rangle + \langle f(w), f(u')\rangle + \langle f(w), f(w')\rangle\,.\end{aligned}$$

Da $U$ und $W$ $f$-invariant sind, folgt aus $U \perp W$, dass

$$\langle f(u), f(w')\rangle = 0 = \langle f(w), f(u')\rangle\,.$$

Also vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\begin{aligned}\langle f(v), f(v')\rangle &= \langle f(u), f(u')\rangle + \langle f(w), f(w')\rangle \\ &= \langle f|_U(u), f|_U(u')\rangle + \langle f|_W(w), f|_W(w')\rangle \\ &= \langle u, u'\rangle + \langle w, w'\rangle\,,\end{aligned}$$

da $f|_U$ und $f|_W$ Isometrien sind. Wegen $U \perp W$ gilt aber auch

$$\begin{aligned}\langle v, v'\rangle &= \langle u+w, u'+w'\rangle = \langle u, u'\rangle + \langle u, w'\rangle + \langle w, u'\rangle + \langle w, w'\rangle \\ &= \langle u, u'\rangle + \langle w, w'\rangle\,,\end{aligned}$$

also ist in der Tat $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$.

**ad (ii):** Nach der Vorlesung existiert ein orthogonales Komplement $W$ von $U$ in $(V, \langle\,,\rangle)$, d.h. ein Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \perp W$. Wir definieren eine lineare Abbildung $f \colon V \to V$ durch $f(v) := g(u) + w$, wenn $v = u + w$ die eindeutige Zerlegung bezüglich $V = U \oplus W$ ist. Dann sind $U$ und $W$ $f$-invariante Unterräume und es ist $f|_U = g$ bzw. $f|_W = \mathrm{id}_W$. Also ist $f|_U$ eine Isometrie von $U$ nach Voraussetzung und wir überprüfen direkt, dass auch $f|_W$ eine Isometrie von $W$ ist. Mit (i) folgt nun, dass auch $f$ eine Isometrie von $(V, \langle\,,\rangle)$ ist.