

DIPLOMARBEIT

*Semistabile symmetrische Spektren
in der \mathbb{A}^1 -Homotopietheorie*

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Juni 2010

Von

Stephan Hähne

Aus
Frankfurt/Oder

Semistabile symmetrische Spektren in der \mathbb{A}^1 -Homotopietheorie

Stephan Hähne

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Homotopietheoretische Grundlagen	4
2.1	Allgemeines über Modellkategorien	4
2.2	Fast endlich erzeugte Modellkategorien	11
2.3	Homotopietheorie von simplizialen Mengen	13
2.4	Die motivische un stabile Homotopiekategorie	17
2.5	Das Vorzeichen $(-1)_T$ und die Wirkung der symmetrischen Gruppe	21
2.5.1	Definition	21
2.5.2	Das Vorzeichen des simplizialen Kreises	21
2.5.3	Das Vorzeichen $(-1)_{\mathbb{P}^1}$ der projektiven Gerade	23
3	Allgemeines über Spektren und symmetrische Spektren	27
3.1	Definitionen	28
3.2	Ringspektren und ihre Lokalisierungen	30
3.3	Modellstruktur	35
3.4	Stabile Äquivalenzen und stabile Homotopiegruppen	37
3.4.1	Allgemeines	37
3.4.2	Das Beispiel $Sp(sSet_*, S^1)$	38
3.4.3	Das Beispiel $Sp(M^{cm}(S), \mathbb{P}^1)$	39
3.4.4	Verallgemeinerung der stabilen Homotopiegruppen	41
4	Allgemeines über die \mathcal{M}-Wirkung	43
5	Semistabilität	47
5.1	Die erste Verallgemeinerung	47
5.1.1	Vorbereitung	48
5.1.2	Proposition und Beispiele	50
5.2	Definition der \mathcal{M} -Wirkung auf stabilen Homotopiegruppen	52
5.3	Einige \mathcal{M} -Isomorphismen zwischen stabilen Homotopiegruppen	53
5.4	Das verallgemeinerte Theorem und Kriterien für Semistabilität	57
6	Beispiele in der motivischen Homotopietheorie	60
6.1	Das motivische Eilenberg-Mac Lane Spektrum	60
6.2	Das algebraische Cobordismus-Spektrum	62
6.2.1	Vektorbündel und Thom-Räume	62
6.2.2	Das Grassmann-Schema und sein tautologisches Bündel	64
6.2.3	Semistabilität von MGL	69
7	Multiplikative Struktur auf den stabilen Homotopiegruppen von symmetrischen Ringspek- tren und deren Lokalisierung	70
7.1	Die Multiplikation auf den stabilen Homotopiegruppen	71
7.2	Lokalisierung von Ringspektren	75
7.3	Zur Lokalisierung von nicht-kommutativen Ringen	77

1 Einleitung

Die Aufgabe dieser Diplomarbeit bestand darin, den für symmetrische Spektren wichtigen Begriff der *Semistabilität* sowie dessen Charakterisierung und einige hinreichende Kriterien zu verallgemeinern, so dass sie auch für symmetrische Spektren in anderen Modellkategorien anwendbar sind. Außerdem werden einige Aussagen über die *Lokalisierung von Ringspektren* entsprechend verallgemeinert. Schließlich wird als Beispiel Semistabilität in der *motivischen stabilen Homotopietheorie* untersucht. Die grundsätzliche Idee ist, dass viele Aussagen, die nur für topologische Räume oder simpliziale Mengen aufgestellt sind, auch schon für Modellkategorie mit geeigneten Eigenschaften gelten.

Der Monoid \mathcal{M} der injektiven Selbstabbildungen von \mathbb{N} operiert auf den stabilen Homotopiegruppen der symmetrischen Spektren. Ein symmetrisches Spektrum ist semistabil, wenn \mathcal{M} auf ihnen trivial operiert. In diesem Sinne misst die \mathcal{M} -Wirkung, wie weit ein symmetrisches Spektrum davon entfernt ist, semistabil zu sein. Außerdem gibt die \mathcal{M} -Wirkung auf den stabilen Homotopiegruppen die symmetrische Struktur wieder, die sonst vergessen wird. Denn es gibt symmetrische Spektren mit isomorphen stabilen Homotopiegruppen, die aber nicht als \mathcal{M} -Moduln isomorph sind ([Sch08M, Example 3.4]). Zudem wird die Semistabilität benutzt, um eine Ringstruktur auf den stabilen Homotopiegruppen von Ringspektren zu definieren, und um zu zeigen, dass die Lokalisierung von Ringspektren auf stabilen Homotopiegruppen genau die entsprechende algebraische Lokalisierung induziert.

Weiterhin gilt, dass für semistabile symmetrische Spektren die Morphismen, die nach Vergessen der symmetrischen Struktur stabile Äquivalenzen von Spektren sind, mit den stabilen Äquivalenzen von symmetrischen Spektren übereinstimmen (vgl. Corollar 5.9, [Sch09, Thm. 4.22, Cor. 6.44]). Außerdem stellt die Semistabilität einen Zusammenhang zwischen den (naiven) stabilen Homotopiegruppen und den echten Homotopiegruppen ([Sch09, Def. 6.35]) her, die von den Sphärenspektren in der stabilen Homotopiekategorie repräsentiert werden ([Sch09, S. 219, Example 1.16.]). Das heißt, dass für semistabile symmetrische Spektren von simplizialen Mengen die (naiven) stabilen Homotopiegruppen mit den echten Homotopiegruppen übereinstimmen ([Sch09, Lemma 6.37]). Das ist nützlich, da naive stabile Homotopiegruppen einfacher zu berechnen sind. Weitere Anwendungen der Semistabilität und des damit verbundenen Begriffs der \mathcal{M} -Wirkung für symmetrische Spektren von simplizialen Mengen werden in [Sch08M, S. 1313 f.] behandelt.

In der algebraischen Geometrie wird eine entsprechende Variante der stabilen Homotopietheorie, die sogenannte *motivische stabile Homotopietheorie*, betrachtet. Scheinbar wurde aber die \mathcal{M} -Wirkung auf stabilen Homotopiegruppen bisher noch nicht für motivische symmetrische Spektren untersucht. Dennoch gibt schon eine Arbeit ([RSØ, Prop. 3.2]), in der gezeigt wurde, dass symmetrische Spektren, für die die Wirkung gerader Permutationen in der Homotopietheorie trivial ist, semistabil sind. Ein wichtiges Corollar (Cor. 5.24) davon besagt, dass ein symmetrisches Spektrum von punktierten motivischen Räumen, dessen Σ_n -Wirkung sich zu einer Wirkung des Gruppenschemas GL_n fortsetzen lässt, semistabil ist. Dieses Corollar wird in Abschnitt 7 benutzt, um zu zeigen, dass das *Eilenberg-Mac Lane Spektrum* und das *algebraische Cobordismus-Spektrum* semistabil sind. Dieses Kriterium entspricht in der stabilen Homotopietheorie von topologischen Räumen der Aussage, dass orthogonale Spektren semistabil sind (siehe [Sch09, Prop. 9.19.]).

Das erste Ziel der Diplomarbeit war, das folgende Theorem aus [Sch08] so zu verallgemeinern, dass es mit den richtigen Voraussetzungen auch für symmetrische Spektren mit „Räumen“ in anderen Modellkategorien wie z. B. den motivischen Räumen der motivischen Homotopietheorie (Prop. 5.21) anwendbar ist:

Theorem 1.1 (Schwede, [Sch08, Theorem 7.27.]). *Für jedes symmetrische Spektrum X von simplizialen Mengen sind die folgenden Bedingungen (i) – (v) äquivalent. Falls X levelweise fasernd ist, so sind diese Bedingungen auch zu den Bedingungen (vi) – (viii) äquivalent.*

(i) *Es gibt einen $\hat{\pi}_*$ -Isomorphismus von X zu einem Ω -Spektrum.*

(ii) *Die tautologische Abbildung $c : \hat{\pi}_k X \rightarrow \pi_k X$ von den naiven zu den echten Homotopiegruppen ist ein Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{Z}$.*

(iii) *Die Wirkung des Injektionsmonoiden \mathcal{M} ist auf allen Homotopiegruppen von X trivial.*

(iv) *Der Zykeloperator d wirkt auf allen Homotopiegruppen von X trivial.*

(v) *Der Morphismus $\lambda_X : S^1 \wedge X \rightarrow shX$ ist ein $\hat{\pi}_*$ -Isomorphismus.*

- (vi) Der Morphismus $\tilde{\lambda}_X : X \rightarrow \Omega(\text{sh}X)$ ist ein $\hat{\pi}_*$ -Isomorphismus.
- (vii) Der Morphismus $\lambda_X^\infty : X \rightarrow R^\infty X$ ist ein $\hat{\pi}_*$ -Isomorphismus.
- (viii) Das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ ist ein Ω -Spektrum.

Auf dem Weg zur Verallgemeinerung dieses Theorems musste die \mathcal{M} -Wirkung auf den stabilen Homotopiegruppen verallgemeinert werden. Dafür gibt es zunächst eine Möglichkeit ohne stabile Homotopiegruppen (siehe Abschnitt 5.1). Dabei werden die stabilen Äquivalenzen von Spektren mit Theorem 3.29 beschreiben (siehe auch Cor. 3.33). Anschließend wird eine \mathcal{M} -Wirkung auf $(\Theta^\infty X)_0$ wie in Definition 4.7 definiert. Im Fall von simplizialen Mengen entspricht dies aber nur der \mathcal{M} -Wirkung auf stabilen Homotopiegruppen in nicht-negativen Graden (siehe Bemerkung nach Def. 4.7). Um dies zu beheben, werden statt dem Spektrum X auch die symmetrischen Spektren $\text{sh}^n X, n \in \mathbb{N}_0$, betrachtet (Lemma 5.10).

Eine zweite Möglichkeit zieht eine Verallgemeinerung der stabilen Homotopiegruppen in Betracht. Zur Lösung des Problems im ersten Ansatz wurden die in der ursprünglichen Definition benutzten Eigenschaften des Vorzeichens $(-1)_{S^1}$ von S^1 axiomatisiert. Es wird dann für T -Spektren verlangt, dass es einen entsprechenden Automorphismus $(-1)_T$ in der Homotopiekategorie gibt. Mit dem Begriff des Vorzeichens lassen sich die Definition der \mathcal{M} -Wirkung auf den stabilen Homotopiegruppen von symmetrischen Spektren sowie die Definition der Multiplikation auf den stabilen Homotopiegruppen von symmetrischen Ringspektren übernehmen, und ebenso ein großer Teil der Beweise. Entscheidend für die Anwendung ist, dass der motivische Raum \mathbb{P}^1 auch einen solchen Automorphismus besitzt. Die verallgemeinerte Fassung ist:

Theorem 1.2. Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine punktierte symmetrisch monoidale Modellkategorie mit einem cofasernden Objekt T , so dass $-\wedge T$ schwache Äquivalenzen erhält und T ein Vorzeichen hat. Sei $i : s\text{Set}_* \rightarrow \mathcal{D}$ ein monoidaler linker Quillen-Funktor mit Adjungiertem j . Sei \mathcal{B} eine Klasse cofasernder Objekte in \mathcal{D} . Weiterhin möge gelten, dass fasernde Objekte in \mathcal{D} unter sequentiellen Colimites abgeschlossen sind, und die Funktoren $j, \text{Hom}(T, -)$ und $\text{Hom}(A, -)$ für alle $A \in \mathcal{B}$ sequentielle Colimites erhalten.

Dann sind für jedes symmetrische T -Spektrum X in \mathcal{D} äquivalent:

- (i) X ist semistabil (siehe Def. 5.14).
- (ii) Der Zykeloperator d (Def. 4.1) wirkt auf allen stabilen Homotopiegruppen von X surjektiv.
- (iii) Die Abbildung $\lambda_X : T \wedge X \rightarrow \text{sh}X$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.

Falls für die Klasse $\{\pi_q^V; q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}\}$ von Funktoren von $\text{Sp}^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ in die \mathcal{M} -Mengen die Voraussetzungen von Proposition 4.8 gelten, dann ist (i) auch äquivalent zu:

(i'): Die Abbildung $c_X : \pi_q^V(X) \rightarrow \widetilde{\pi}_q^V(X)$ (Def. 4.8) ist für alle $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$ eine Bijektion.

Falls X levelweise fasernd ist, sind die Bedingungen (i) – (iii) weiter äquivalent zu:

- (iv) Die Abbildung $\tilde{\lambda}_X : X \rightarrow RX$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.
- (v) Die Abbildung $\tilde{\lambda}_X^\infty : X \rightarrow R^\infty X$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.
- (vi) Das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ ist semistabil.

Falls zusätzlich die folgenden Bedingungen gelten:

- die projektive levelweise Modellstruktur in $\text{Sp}(\mathcal{D}, T)$ existiert und die Bedingung (a) in Proposition 5.7 gilt,
- die projektiv levelweise Modellstruktur auf $\text{Sp}^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ existiert und damit insbesondere eine levelweise fasernde Ersetzung $1 \rightarrow J^\Sigma$, und
- $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenzen stimmen mit stabilen Äquivalenzen in $\text{Sp}(\mathcal{D}, T)$ überein (siehe 3.21),

so sind die obigen Bedingungen (i) – (iii) zu (viii) äquivalent, und falls X zusätzlich levelweise fasernd ist, so sind alle obigen Bedingungen zu (vii) äquivalent:

(vii) Das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ ist ein Ω -Spektrum.

(viii) Es gibt eine Abbildung von symmetrischen Spektren von X zu einem Ω -Spektrum, die eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz ist.

Zusätzlich gelten immer die Implikationen (viii) \Rightarrow (i) und (vii) \Rightarrow (vi).

Des Weiteren wurde die Proposition [Sch08, Proposition 6.29], welche die stabilen Homotopiegruppen von lokalisierten symmetrischen Spektren beschreibt, verallgemeinert. Sie besagt, dass der Ring der stabilen Homotopiegruppen des lokalisierten symmetrischen Spektrums $R[1/x]$ die Lokalisierung des Ringes der stabilen Homotopiegruppen von R an x ist. Die entscheidende Voraussetzung hierfür ist die Semistabilität von R , die zugleich die Semistabilität von $R[1/x]$ impliziert. Die Verallgemeinerung ist:

Theorem 1.3. Sei R ein levelweise faserndes semistabiles symmetrisches T -Ringspektrum und $x : T^l \rightarrow R_m$ eine zentrale Abbildung. Dann ist $R[1/x]$ semistabil und für alle $U \in \mathcal{B}'$ sind die Monoidabbildungen $\pi_{*,*}^U(R) \xrightarrow{j_*} \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ $[x_{c_l}]$ -Lokalisierungen (Def. von c_l steht vor Prop. 7.4, außerdem siehe Def. 7.9). Ebenso ist der Ringhomomorphismus $\oplus \pi_{*,*}^U(R) \xrightarrow{j_*} \oplus \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ eine $[x_{c_l}]$ -Lokalisierung.

Schließlich wurden zwei Beispiel-Spektren aus der stabilen motivischen Homotopietheorie auf Semistabilität untersucht. Es wurde gezeigt, dass das motivische Eilenberg-Mac Lane Spektrum und das algebraische Cobordismus-Spektrum semistabil sind.

Zur Organisation der Arbeit: In den Kapiteln 2 bis 4 werden alle wichtigen Grundlagen eingeführt. In Kapitel 2 wird insbesondere der wichtige Begriff der *fast endlich erzeugten Modellkategorien* definiert, zu denen die *motivisch abgeschlossen-flasque Modellkategorie* gehört, die danach eingeführt wird. Außerdem wird dort der Begriff des Vorzeichens definiert, der beschreibt, wie Permutieren einer Smash-Potenz eines Objektes durch einen Automorphismus auf einem einzigen Faktor des Smash-Produktes ausgedrückt werden kann.

In Kapitel 3 werden symmetrische Spektren, ihre Lokalisierungen sowie die stabilen Homotopiegruppen definiert. Es wird gezeigt, dass für simpliziale Mengen und motivische Räume beide Begriffe der stabilen Äquivalenzen von Spektren übereinstimmen, das heißt die Definition mittels stabiler Homotopiegruppen und die mittels Bousfield-Lokalisierungen an Ω -Spektren sind äquivalent. Schließlich werden die stabilen Homotopiegruppen in naheliegender Weise verallgemeinert und damit auch der Begriff der stabilen Äquivalenz.

In Kapitel 4 werden der Monoid \mathcal{M} sowie \mathcal{M} -Objekte eingeführt. Es wird erklärt, wie man \mathcal{M} -Objekte mit nützlichen Eigenschaften (die sich aus der *Zahmheit* ergeben) aus \mathcal{T} -Funktoeren erhält, und wie man diese Funktoeren wiederum aus symmetrischen Spektren konstruiert. Diese Konstruktion findet dann in Kapitel 5 Anwendung. Dort werden ein paar Teile des obigen Theorems 1.1 verallgemeinert.

Ebenso wird in Kapitel 5 die \mathcal{M} -Wirkung auf den verallgemeinerten stabilen Homotopiegruppen definiert. Anschließend wird diese \mathcal{M} -Modul-Struktur der stabilen Homotopiegruppen von shX , $X \wedge T$ und ΩX durch die von X ausgedrückt. Danach wird das ursprüngliche Theorem vollständig verallgemeinert sowie einige wichtige Kriterien für Semistabilität bewiesen. Mit dessen Hilfe werden dann in Kapitel 6 zwei Beispiele für semistabile motivische symmetrische Spektren gegeben.

In Kapitel 7 wird beschrieben, wie die verallgemeinerten stabilen Homotopiegruppen von symmetrischen semistabilen Ringspektren eine multiplikative Struktur erben, und gezeigt, dass die Lokalisierung $R[1/x]$ eines symmetrischen semistabilen Ringspektrums R an einer Abbildung $x : T^l \rightarrow R_m$ wieder semistabil ist und dass die Lokalisierungsabbildung auf dem graduierten Ring der stabilen Homotopiegruppen eine Lokalisierung von Ringen induziert.

2 Homotopietheoretische Grundlagen

2.1 Allgemeines über Modellkategorien

In diesem Abschnitt werden ein paar hilfreiche Aussagen über Modellkategorien zusammengefasst. Die Definitionen, insbesondere die der Modellkategorien, der Homotopiekategorien und der Quillen-Funktoeren, sowie Beispiele zu Modellkategorien befinden sich in [Hov1], [Hi], [DS] und [GJ]. Diese werden als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere werden simpliziale Modellkategorien ([Hi, Def. 9.1.6]) häufig benutzt. Dabei wird der Abbildungsraum von simplizialen Modellkategorien immer mit Map bezeichnet.

Definition 2.1. Wann immer M eine Modellkategorie ist, werden die Morphismenmengen von $Ho(M)$ mit $[X, Y] := Ho(M)(X, Y)$ bezeichnet, wenn vom Kontext klar ist, dass die Modellkategorie M gemeint ist.

Um diese Morphismenmengen zu bestimmen wird häufig folgende bekannte Aussage benutzt:

Proposition 2.2 ([DS, Prop. 5.11]). Sei M eine Modellkategorie, A cofasernd und X fasernd in M . Bezeichne \sim die Homotopierelation (falls M simplizial ist, genügt die simpliziale Homotopierelation). Ferner sei $\gamma : M \rightarrow Ho(M)$ der Lokalisierungsfunktor. Dann ist die induzierte Abbildung $M(A, X) / \sim \xrightarrow{\gamma} [A, X]$ eine Bijektion.

Bemerkung Wann immer wir mit symmetrisch monoidalen Kategorien arbeiten, werden wir stets das Kohärenztheorem von Mac Lane [ML] für diese benutzen, was besagt, dass alle Diagramme, die aus Assoziativitäts-, Einheits- und Symmetriemorphismen und Identitäten sowie dem monoidalen Produkt bestehen, kommutieren. Außerdem wird angenommen, dass die Assoziativitätsmorphismen Identitäten sind.

Definition 2.3. Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine monoidale Kategorie, z. B. $M(S)$ (siehe Abschnitt 2.4). Das Pushout-Produkt zweier Abbildungen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow D$ ist die Abbildung $f \sqcup g : A \wedge D \cup_{A \wedge B} C \wedge B \rightarrow C \wedge D$, welches durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \wedge B & \xrightarrow{A \wedge g} & A \wedge D \\ \downarrow f \wedge B & & \downarrow f \wedge D \\ C \wedge B & \xrightarrow{C \wedge g} & C \wedge D \end{array}$$

induziert wird. Entsprechendes lässt sich auch für simpliziale Modellkategorien (Def. [Hi, Def. 9.1.6]) definieren, wo dann statt dem Produkt $-\wedge-$ das Produkt $-\otimes-$ benutzt wird.

Definition 2.4. Sei M eine Modellkategorie.

- Zwei Objekte A, B in M (mit Σ_n -Wirkung) heißen (Σ_n -äquivariant) schwach äquivalent, falls es ein Zickzack von (Σ_n -äquivarianten) schwachen Äquivalenzen in M zwischen A und B gibt.
- Zwei Abbildungen f und g in M heißen schwach äquivalent, wenn es ein Zickzack in der Kategorie der Abbildungen von M aus schwachen Äquivalenzen zwischen f und g gibt.

Definition 2.5. • Ein sequentielles Diagramm in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein Funktor der Form $X_\bullet : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \rightarrow \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ die zur partiell geordneten Menge \mathbb{N}_0 zugehörige Kategorie ist. Eine Abbildung von sequentiellen Diagrammen in \mathcal{C} ist eine natürliche Transformation.

- Ein Funktor $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ erhält sequentielle Colimites, wenn für alle sequentiellen Diagramme X_\bullet in \mathcal{C}_1 , für die $\text{colim} X_\bullet$ existiert, auch $\text{colim} F(X_\bullet)$ existiert und die Abbildung $\text{colim} F(X_\bullet) \xrightarrow{F(\text{incl})} F(\text{colim} X_\bullet)$ ein Isomorphismus ist.
- Ein Objekt A einer Kategorie \mathcal{C} heißt endlich dargestellt, falls der Funktor $\mathcal{C}(A, -)$ sequentielle Colimites erhält.
- Ein Objekt A einer abgeschlossen monoidalen Kategorie \mathcal{C} heißt Hom-endlich dargestellt, falls der Funktor $\text{Hom}(A, -)$ sequentielle Colimites erhält.

Die folgenden beiden Aussagen werden im Zusammenhang mit fast endlichen erzeugten Modellkategorien wichtig sein (Abschnitt 2.2).

Proposition 2.6. Sei M eine Modellkategorie und $X : X_0 \xrightarrow{x_0} X_1 \xrightarrow{x_1} \dots X_n \xrightarrow{x_n} X_{n+1} \xrightarrow{x_{n+1}} \dots, n \in \mathbb{N}_0$ eine Folge von Abbildungen in M .

Dann gibt es ein kommutatives Diagramm in M :

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & \dots & \xrightarrow{x_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{x_n} & X_{n+1} & \xrightarrow{x_{n+1}} & \dots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \\ Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & \dots & \xrightarrow{y_{n-1}} & Y_n & \xrightarrow{y_n} & Y_{n+1} & \xrightarrow{y_{n+1}} & \dots \end{array}$$

so dass die Objekte $Y_n, n \in \mathbb{N}_0$, fasernd sind, die Abbildungen $f_n, n \in \mathbb{N}_0$, triviale Cofaserungen und die Abbildung $\text{colim}_{n \geq 0} f_n$ auch eine triviale Cofaserung.

Das obige Diagramm ist bezüglich X funktoriell.

Beweis. Wir konstruieren induktiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Abbildungen $y_n : Y_n \rightarrow Y_{n+1}$, triviale Cofaserungen $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ und triviale Cofaserungen $g_n : Y_n \cup_{X_n} X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1}$, so dass gilt: $f_{n+1} \cdot x_n = y_{n+1} \cdot f_n$, $y_n = g_n \cdot \text{incl}_{Y_n}$, $f_{n+1} = g_n \cdot \text{incl}_{X_{n+1}}$:

$$\begin{array}{ccc}
 X_n & \xrightarrow{x_n} & X_{n+1} \\
 \downarrow f_n & \text{incl}_{X_{n+1}} \downarrow & \downarrow f_{n+1} \\
 Y_n & \xrightarrow{\text{incl}_{Y_n}} & Y_n \cup_{X_n} X_{n+1} \\
 & \searrow y_n & \downarrow g_n \\
 & & Y_{n+1}
 \end{array}$$

und alle Abbildungen funktoriell in X sind.

Zunächst wählen wir eine (funktorielle) cofasernde fasernde Approximation $f_0 : X_0 \rightarrow Y_0$.

Dann nehmen wir an, dass wir die Konstruktion von y_{i-1} , f_i , g_{i-1} zusammen mit den obigen Eigenschaften schon bis $i \leq n$ durchgeführt haben. Nun wählen wir eine (funktorielle) cofasernde fasernde Approximation $g_n : Y_n \cup_{X_n} X_{n+1} \rightarrow Y_{n+1}$.

Die Abbildungen y_n, f_{n+1} werden so gewählt, wie in den obigen Relationen angegeben (siehe auch das Diagramm). Da nach Induktion f_n triviale Cofaserungen sind, und damit ihr Pushout $\text{incl}_{X_{n+1}}$ auch, ist f_{n+1} auch eine triviale Cofaserung.

Es ist noch zu zeigen, dass die Abbildung $\text{colim}_{i \geq 0} f_i$ eine triviale Cofaserungen ist, was äquivalent dazu ist, dass diese die linke Hochhebungseigenschaft bzgl. aller Faserungen hat [Hi, Prop. 7.2.3]. Ein Liftungsdiagramm (mit Lift l):

$$\begin{array}{ccc}
 \text{colim } X_i & \xrightarrow{s} & U \\
 \text{colim } f_i \downarrow & \nearrow l & \downarrow u \\
 \text{colim } Y_i & \xrightarrow{t} & V
 \end{array}$$

in dem u eine Faserung ist, entspricht kommutativen Diagrammen (mit Lifts l_i):

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \xrightarrow{s_i} & U \\
 f_i \downarrow & \nearrow l_i & \downarrow u \\
 Y_i & \xrightarrow{t_i} & V
 \end{array}$$

für alle $i \geq 0$, so dass $s_{i+1} \cdot x_i = s_i$ und $t_{i+1} \cdot y_i = t_i$ (sowie $l_{i+1} \cdot y_i = l_i$) für alle $i \geq 0$.

Wir konstruieren den Lift l induktiv. Zunächst gibt es einen Lift l_0 , der obiges Diagramm kommutativ macht, da f_0 eine triviale Cofaserung und u eine Faserung ist. Nun nehmen wir an, dass wir schon Lifts l_i mit den angegebenen Eigenschaften für alle $i \leq n$ konstruiert haben.

Wir erhalten das kommutative Diagramm (durchgezogene Pfeile):

$$\begin{array}{ccc}
 Y_n \cup_{X_n} X_{n+1} & \xrightarrow{(l_n, s_{n+1})} & U \\
 \downarrow g_n & \nearrow l_{n+1} & \downarrow u \\
 Y_{n+1} & \xrightarrow{t_{n+1}} & V
 \end{array}$$

denn $s_{n+1} \cdot x_n = s_n = l_n \cdot f_n$, $t_{n+1} \cdot g_n \cdot \text{incl}_{Y_n} = t_{n+1} \cdot y_n = t_n = u \cdot l_n$ und $t_{n+1} \cdot g_n \cdot \text{incl}_{X_{n+1}} = t_{n+1} \cdot f_{n+1} = u \cdot s_{n+1}$. Da g_n eine triviale Cofaserung und u eine Faserung ist, gibt es nach dem Liftungsaxiom eine Abbildung l_{n+1} , die das gesamte Diagramm kommutativ macht. Für diese gilt dann, dass das vorletzte Diagramm kommutiert (denn $s_{n+1} = l_{n+1} \cdot g_n \cdot \text{incl}_{X_{n+1}} = l_{n+1} \cdot f_{n+1}$) und $l_{n+1} \cdot y_n = l_{n+1} \cdot g_n \cdot \text{incl}_{Y_n} = l_n$. Damit ist $\text{colim}_{i \geq 0} f_i$ eine triviale Cofaserung. \square

Corollar 2.7. Sei M eine Modellkategorie. Wir nehmen an, dass sequentielle Colimites von schwachen Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten schwache Äquivalenzen sind. Dann gilt, dass schwache Äquivalenzen abgeschlossen unter sequentiellen Colimites sind.

Beweis. Sei $p_\bullet : X_\bullet \rightarrow X'_\bullet$ ein Morphismus von sequentiellen Diagrammen, so dass die Abbildungen $p_i, i \in \mathbb{N}_0$ schwache Äquivalenzen sind.

Nach Prop. 2.6 können wir ein kommutatives Diagramm von sequentiellen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
X_\bullet & \xrightarrow{p_\bullet} & X'_\bullet \\
\downarrow f_\bullet & & \downarrow f'_\bullet \\
Y_\bullet & \xrightarrow{q_\bullet} & Y'_\bullet
\end{array}$$

finden, so dass die Objekte $Y_i, Y'_i, i \in \mathbb{N}_0$ fasernd und die Abbildungen $f_i, f'_i, i \in \mathbb{N}_0$ sowie $\text{colim } f_\bullet, \text{colim } f'_\bullet$ schwache Äquivalenzen sind. Dann sind auch $q_i, i \in \mathbb{N}_0$ schwache Äquivalenzen und nach Voraussetzung $\text{colim } q_\bullet$ eine schwache Äquivalenz. Somit ist auch $\text{colim } p_\bullet$ eine schwache Äquivalenz. \square

Das nächste Lemma wird später für einen Adjunktionsisomorphismus (siehe Prop. 5.16 (ii)) zwischen stabilen Homotopiegruppen gebraucht.

Lemma 2.8. Sei M eine symmetrisch monoidale Modellkategorie und T ein Objekt von M , so dass $- \wedge T$ Cofaserungen und schwache Äquivalenzen erhält. Seien A ein cofaserndes und X, Y zwei fasernde Objekte in M . Dann gibt es natürliche Bijektionen $\alpha_{A,Y} : [A, \text{Hom}(T, Y)] \xrightarrow{\cong} [A \wedge T, Y]$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
[A, X] & \xrightarrow{- \wedge T} & [A \wedge T, X \wedge T] \\
\hat{f}_* \downarrow & & \downarrow f_* \\
[A, \text{Hom}(T, Y)] & \xrightarrow{\alpha_{A,Y}} & [A \wedge T, Y]
\end{array}$$

kommutiert, falls $f : X \wedge T \rightarrow Y$ eine Abbildung und \hat{f} ihr Adjungiertes ist.

Beweis. Da $(- \wedge T, \text{Hom}(T, -))$ ein Quillen-Funktor-Paar ist, induziert der Adjunktionsisomorphismus einen Isomorphismus auf Homotopieklassen $M(A, \text{Hom}(T, Y)) / \sim \cong M(A \wedge T, Y) / \sim$ (siehe [Hi, Prop. 8.5.16]) und damit eine natürliche Bijektion $\alpha_{A,Y} : [A, \text{Hom}(T, Y)] \xrightarrow{\cong} [A \wedge T, Y]$ ([DS, Prop. 5.11]). Nach der Eigenschaft der Adjunktion kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
M(A, X) & \xrightarrow{- \wedge T} & M(A \wedge T, X \wedge T) \\
\text{Einheit}_* \downarrow & \nearrow \alpha_{A, X \wedge T} & \downarrow f_* \\
M(A, \text{Hom}(T, X \wedge T)) & & M(A \wedge T, Y) \\
\text{Hom}(T, f)_* \downarrow & \nearrow \alpha_{A, Y} & \\
M(A, \text{Hom}(T, Y)) & &
\end{array}$$

und somit auch obiges Diagramm, denn $\gamma : M(A, X) \rightarrow [A, X]$ ist surjektiv, da A cofasernd und X fasernd ist. \square

Die nächsten beiden Lemma untersuchen das Vertauschen mit sequentiellen Colimites, was insbesondere in Lemma 3.49 benutzt wird.

Lemma 2.9. Für eine symmetrisch monoidale Kategorie $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ mit allen sequentiellen Colimites haben wir:

- Die Verkettung zweier Funktoren $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_3$ (zwischen Kategorien mit allen sequentiellen Colimites), die mit sequentiellen Colimites vertauschen, vertauscht auch mit diesen.
- Seien A und B zwei Objekte in \mathcal{D} , so dass $\text{Hom}(A, -)$ und $\text{Hom}(B, -)$ mit sequentiellen Colimites vertauscht. Dann vertauscht auch $\text{Hom}(A \wedge B, -)$ mit sequentiellen Colimites.
- Falls $\text{Hom}(A, -)$ mit sequentiellen Colimites vertauscht und S^0 endlich dargestellt ist, dann ist A endlich dargestellt.

Beweis. • Sei X_\bullet ein sequentielles Diagramm in \mathcal{C}_1 . Wir erhalten ein neues sequentielles Diagramm

$$F(X_\bullet) \text{ in } \mathcal{C}_2 \text{ und einen Isomorphismus } \text{colim } F(X_\bullet) \xrightarrow{F(\text{incl})} F(\text{colim } X_\bullet). \text{ Nach Voraussetzung ist } \text{colim } G(F(X_\bullet)) \xrightarrow{G(\text{incl})} G(\text{colim } F(X_\bullet)) \text{ ein Isomorphismus. Somit ist auch } \text{colim } GF(X_\bullet) \xrightarrow{GF(\text{incl})} GF(\text{colim } X_\bullet) \text{ ein Isomorphismus.}$$

- Wir haben: $\text{Hom}(A \wedge B, -) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, -))$.
- Es gilt $\mathcal{D}(A, -) \cong \mathcal{D}(S^0 \wedge A, -) \cong \mathcal{D}(S^0, \text{Hom}(A, -))$.

\square

Lemma 2.10. Sei M eine simpliziale Modellkategorie und A ein cofaserndes Objekt in M , so dass A und $A \otimes \Delta^1$ endlich dargestellt sind. Weiterhin seien fasernde Objekte unter sequentiellen Colimites abgeschlossen. Dann vertauscht auch der Funktor $Ho(M)(A, \gamma) : M \rightarrow Set$ mit sequentiellen Colimites, wobei $\gamma : M \rightarrow Ho(M)$ der Lokalisierungsfunktor ist.

Beweis. Sei X_\bullet ein sequentielles Diagramm in M . Wir müssen zeigen, dass die Abbildung

$colim[A, X_\bullet] \xrightarrow{(incl_*)} [A, colim X_\bullet]$ ein Isomorphismus ist.

Wegen Proposition 2.6 und der Annahme, dass fasernde Objekte unter sequentiellen Colimites abgeschlossen sind, können wir annehmen, dass alle $X_i, i \in \mathbb{N}_0$ und $colim X_\bullet$ fasernd sind.

Bezeichne \sim die Homotopierelation. Dann kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} colim M(A, X_\bullet) & \xrightarrow[\cong]{incl_*} & M(A, colim X_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ colim M(A, X_\bullet)/\sim & \xrightarrow{incl_*} & M(A, colim X_\bullet)/\sim \\ \cong \downarrow colim \gamma & & \cong \downarrow \gamma \\ colim[A, X_\bullet] & \xrightarrow{incl_*} & [A, colim X_\bullet] \end{array}$$

Dabei sind die unteren vertikalen Abbildung wegen [DS, Prop. 5.11] Isomorphismen. Die obige Abbildung ist ein Isomorphismus, da A endlich dargestellt ist. Also sind die unteren Abbildungen surjektiv, denn die oberen vertikalen Abbildungen sind surjektiv. Seien $f_i : A \rightarrow X_k, i = 0, 1$ zwei Abbildungen, sodass es eine Homotopie $H : A \otimes \Delta^1 \rightarrow colim X_\bullet$ mit $H(i) = incl_k \cdot f_i, i = 0, 1$ gibt (wobei $incl_k : X_k \rightarrow colim X_\bullet$ die Inklusionsabbildungen sind), d.h. die Abbildungen sind in $M(A, colim X_\bullet)/\sim$ gleich.

Da aber auch das Zylinderobjekt $A \otimes \Delta^1$ endlich dargestellt ist, ist die Abbildung $colim M(A \otimes \Delta^1, X_\bullet) \rightarrow M(A \otimes \Delta^1, colim X_\bullet)$ eine Bijektion. Wegen dessen Surjektivität faktorisiert H über eine Homotopie $H' : A \otimes \Delta^1 \rightarrow X_j$. Wegen der Injektivität der obigen Abbildung im Diagramm und $incl_j \cdot H'(i) = H(i) = incl_k \cdot f_i$, gibt es ein $k' \geq j, k$ so dass $[x_{k'} \cdot x_{k'-1} \cdots x_j \cdot H'](i) = x_{k'} \cdot x_{k'-1} \cdots x_k \cdot f_i$ (wobei x_i die Abbildungen des Diagramms X_\bullet sind). Damit sind die Abbildungen $f_i, i = 0, 1$ in $colim M(A, X_\bullet)/\sim$ gleich und die untere Abbildung auch injektiv. \square

Manchmal wird der derivierte Funktor eines linken Quillen-Funktors nur auf der Unterkategorie der cofasernden Objekten ausgewertet. Dann kann man auf die Komposition mit einem cofasernden Ersetzungsfunktor verzichten:

Lemma 2.11. Sei M eine Modellkategorie und M_c die Unterkategorie der cofasernden Objekte. Dann faktorisiert der Lokalisierungsfunktor $\gamma : M \rightarrow Ho(M)$ über einen Funktor $\gamma' : M_c \rightarrow Ho(M)_c$, wobei $Ho(M)_c$ die volle Unterkategorie der cofasernden Objekte in $Ho(M)$ ist. Zusätzlich ist der Funktor γ' eine Lokalisierung derjenigen Abbildungen in M_c , die schwache Äquivalenzen von M sind.

Beweis. Der Inklusionsfunktor $i : M_c \rightarrow M$ induziert auf den Homotopiekategorien eine Kategorien-Äquivalenz $Ho(i) : Ho(M_c) \rightarrow Ho(M)$ (siehe [Hov1, Prop. 1.2.3]). Das Bild von $Ho(i)$ ist die volle Unterkategorie $Ho(M)_c$ der cofasernden Objekte von $Ho(M)$. Damit induziert $Ho(i)$ eine Kategorien-Äquivalenz $Ho(M_c) \rightarrow Ho(M)_c$, die auf Objekten die Identität ist, und somit insbesondere ein Isomorphismus von Kategorien ist. Also ist auch die Komposition $M_c \rightarrow Ho(M_c) \rightarrow Ho(M)_c$ ein Lokalisierung und diese stimmt mit dem Funktor γ' überein. \square

Bemerkung Zu jeder Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in $Ho(M)$ gibt es eine endliche Folge $(f_1, w_1, \dots, f_{n-1}, w_{n-1})$ von Abbildungen $f_i : X_i \rightarrow Y_i, w_i : X_{i+1} \rightarrow Y_i$ in M , wobei w_i schwache Äquivalenzen sind, so dass gilt: $X = X_0, Y = X_n$ und $f = \gamma(w_{n-1})^{-1} \cdot \gamma(f_{n-1}) \cdots \gamma(w_1)^{-1} \cdot \gamma(f_1)$ (siehe [DS, Prop. 5.8]).

Falls X und Y nun cofasernd sind, so können wir annehmen, dass f_i, w_i als Morphismen in M_c gewählt wurden. Denn obige Abbildungen f_i, w_i können mit einem cofasernden Ersetzungsfunktor Q ersetzt werden, so dass wir eine neue solche Folge in M_c erhalten (wobei an den Enden die entsprechenden Abbildungen $QX \rightarrow X, QY \rightarrow Y$ ergänzt werden müssen), die ebenso f repräsentiert.

Falls nun $F : M \rightarrow M$ ein Funktor ist, der schwache Äquivalenzen zwischen cofasernden Objekten auf schwache Äquivalenzen und cofasernde Objekte auf cofasernde Objekte schickt, dann induziert dieser nach dem letzten Lemma einen Funktor $F : Ho(M)_c \rightarrow Ho(M)_c$. Dieser muss den Morphismus f dann auf den Morphismus schicken, der von der Folge $(F(f_1), F(w_1), \dots, F(f_{n-1}), F(w_{n-1}))$ repräsentiert wird, denn $M_c \xrightarrow{\gamma} Ho(M)_c \xrightarrow{F} Ho(M)_c$ ist gleich $M_c \xrightarrow{F} M_c \xrightarrow{\gamma} Ho(M)_c$.

Lemma 2.12. Sei M eine monoidale Modellkategorie und C ein Objekt in M , so dass $- \wedge C$ schwache Äquivalenzen erhält. Sei g ein Endomorphismus von C . Dann sind die folgenden beiden Kompositionen gleich:

$$Ho(M)(A, B) \xrightarrow{- \wedge C} Ho(M)(A \wedge C, B \wedge C) \xrightarrow[B \wedge g_*]{A \wedge g^*} Ho(M)(A \wedge C, B \wedge C)$$

Beweis. Aufgrund der Natürlichkeit in A und B beider Abbildungen und der Voraussetzung über C , reicht es, dies für cofasernde Objekte A und fasernde Objekte B zu zeigen. Wir haben dann ein kommutatives Diagramm, in dem die ganz linke Abbildung surjektiv ist ([DS, Prop. 5.11]):

$$\begin{array}{ccccc} M(A, B) & \xrightarrow{- \wedge C} & M(A \wedge C, B \wedge C) & \xrightarrow[B \wedge g_*]{A \wedge g^*} & M(A \wedge C, B \wedge C) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ Ho(M)(A, B) & \xrightarrow{- \wedge C} & Ho(M)(A \wedge C, B \wedge C) & \xrightarrow[B \wedge g_*]{A \wedge g^*} & Ho(M)(A \wedge C, B \wedge C) \end{array}$$

Wegen der Funktorialität von \wedge sind aber schon die beiden obigen Kompositionen gleich und damit auch die unteren. \square

Cogruppen-Objekte Mittels Cogruppen-Objekten, wie z. B. die S^1 in $Ho(sSet_*)$, können Homotopiegruppen definiert werden.

Lemma-Definition 2.13. Sei \mathcal{C} eine Kategorie und T ein Objekt von \mathcal{C} , so dass $\emptyset, T \amalg T$ und $T \amalg T \amalg T$ existieren. Dann entspricht einer Faktorisierung des Funktors $\mathcal{C}(T, -) : \mathcal{C} \rightarrow Set$ über den Vergissfunktor $Gr \rightarrow Set$ den folgenden Daten:

- $T \xrightarrow{\mu} T \amalg T$ (Comultiplikation)
- $T \xrightarrow{z} \emptyset$ (Coeinheitsabbildung)
- $T \xrightarrow{inv} T$ (Coinvers-Abbildung)

so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- $(\mu \amalg T)\mu = (T \amalg \mu)\mu$ (Coassoziativität)
- $(T \amalg z)\mu = incl_T, (z \amalg T)\mu = incl_T$
- $codiag(inv \amalg T)\mu = codiag(T \amalg inv)\mu = (\emptyset \rightarrow T)z$

Dabei ist die Multiplikation auf $\mathcal{C}(T, X)$ die Komposition $\mathcal{C}(T, X) \times \mathcal{C}(T, X) \cong \mathcal{C}(T \amalg T, X) \xrightarrow{\mu^*} \mathcal{C}(T, X)$, die Einheitsabbildung $* \cong \mathcal{C}(\emptyset, X) \xrightarrow{z^*} \mathcal{C}(T, X)$ und die Invers-Abbildung $\mathcal{C}(inv, X)$. Falls eine der beiden äquivalenten Aussagen gilt, so sagt man, dass (μ, z, inv) eine Cogruppenstruktur von T ist bzw. dass T eine Cogruppenstruktur hat.

Falls $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor ist, so dass $F\emptyset = \emptyset, F(T \amalg T) \cong FT \amalg FT$ und $F(T \amalg T \amalg T) \cong FT \amalg FT \amalg FT$ (für die Inklusionsabbildungen) gilt, und T eine Cogruppenstruktur hat, so hat FT auch eine Cogruppenstruktur, bei der $FT \xrightarrow{F\mu} F(T \amalg T) \cong FT \amalg FT$ die Comultiplikation ist, und die Coeinheits- und Coinvers-Abbildung entsprechend gebildet werden.

Eine Cogruppenstruktur auf T heißt abelsch, falls $\mathcal{C}(T, -)$ auch über die Kategorie der abelschen Gruppen faktorisiert. Dies ist äquivalent dazu, dass $(incl_2, incl_1) \cdot \mu = \mu$ gilt.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Yoneda-Lemma und der Tatsache, dass $\mathcal{C}(\emptyset, X) = *$ und $\mathcal{C}(T \amalg T, X) \cong \mathcal{C}(T, X) \times \mathcal{C}(T, X)$ gilt. Die zweite Aussage folgt aus der Funktorialität. \square

Lemma 2.14. Sei M eine simpliziale Modellkategorie.

- Seien A_1, A_2 zwei cofasernde Objekte in M und $incl_i : A_i \xrightarrow{A} \amalg_1$, $i = 1, 2$ deren Inklusionen. Dann sind die natürlichen Abbildungen:

$$[A_1 \amalg A_2, X] \xrightarrow{(incl_1^*, incl_2^*)} [A_1, X] \times [A_2, X]$$

Bijektionen. Insbesondere ist also $A_1 \amalg A_2$ zusammen mit den Abbildungen $incl_i$ das Coprodukt von A_1 und A_2 in $Ho(\mathcal{D})$.

- Das Objekt \emptyset ist das initiale Objekt in $Ho(M)$ und $*$ das terminale Objekt in $Ho(M)$.

Beweis. • Wegen der Natürlichkeit reicht dies für eine fasernde Ersetzung von X zu zeigen. Also nehmen wir an, dass X fasernd ist. Da A_1, A_2 und $A_1 \amalg A_2$ cofasernd sind, sind die vertikalen Abbildungen in dem folgenden Diagramm Bijektionen (wobei \sim die simpliziale Homotopierelation ist):

$$\begin{array}{ccc} M(A_1 \amalg A_2, X) / \sim & \xrightarrow{(incl_1^*, incl_2^*)} & M(A_1, X) / \sim \times M(A_2, X) / \sim \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \times \gamma \\ [A_1 \amalg A_2, X] & \xrightarrow{(incl_1^*, incl_2^*)} & [A_1, X] \times [A_2, X] \end{array}$$

Die obere Abbildung ist nach Konstruktion surjektiv und injektiv wegen $(A_1 \amalg A_2) \otimes \Delta^1 \cong (A_1 \otimes \Delta^1) \amalg (A_2 \otimes \Delta^1)$. Also ist auch die untere Abbildung eine Bijektion.

- Da \emptyset cofasernd und $*$ fasernd ist, gilt $[\emptyset, X] \cong M(\emptyset, X') / \sim \cong *$, wobei X' eine fasernde Ersetzung von X ist, und entsprechend $[A, *] \cong *$. □

Corollar 2.15. Sei M eine simpliziale punktierte monoidale Modellkategorie und T ein cofaserndes Objekt in M , so dass T in $Ho(M)$ eine Cogruppenstruktur trägt, d.h. es gibt insbesondere Abbildungen $\mu : T \rightarrow T \vee T$, $inv : T \rightarrow T$ und $z : T \rightarrow *$, die der Gruppenstruktur auf $[T, -]$ entsprechen.

Die zwei Cogruppenstrukturen auf $T \wedge T$, die durch Anwenden der Endofunktoren (von $Ho(M)_c$) $T \wedge -$ und $- \wedge T$ auf die Cogruppenstruktur von T gegeben sind, stimmen überein und sind abelsch.

Beweis. Wir zeigen, dass die induzierten Gruppenstrukturen auf $[T \wedge T, X]$ übereinstimmen und abelsch sind. Zunächst haben beide das gleiche neutrale Element, denn in $Ho(M)$ ist $*$ das terminale Objekt. Die durch $T \wedge -$ induzierte Multiplikation werde mit \cdot_1 bezeichnet und die durch $- \wedge T$ induzierte Multiplikation mit \cdot_2 . Es genügt schließlich zu zeigen, dass $(a \cdot_1 b) \cdot_2 (c \cdot_1 d) = (a \cdot_2 c) \cdot_1 (b \cdot_2 d)$ für $a, b, c, d \in [T \wedge T, X]$ gilt. Dies gilt, da das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} T \wedge T & \xrightarrow{\mu \wedge T} & (T \vee T) \wedge T & \xleftarrow{\cong} & (T \wedge T) \vee (T \wedge T) \\ \downarrow T \wedge \mu & & \downarrow (T \vee T) \wedge \mu & & \downarrow (T \wedge \mu) \vee (T \wedge \mu) \\ T \wedge (T \vee T) & \xrightarrow{\mu \wedge (T \vee T)} & (T_1 \vee T_2) \wedge (T_1 \vee T_2) & \xleftarrow{\cong} & [T_1 \wedge (T_1 \vee T_2)] \vee [T_2 \wedge (T_1 \vee T_2)] \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ (T \wedge T) \vee (T \wedge T) & \xrightarrow{(\mu \wedge T) \vee (\mu \wedge T)} & [(T_1 \vee T_2) \wedge T_1] \vee [(T_1 \vee T_2) \wedge T_2] & & [(T_1 \wedge T_1) \vee (T_1 \wedge T_2)] \vee [(T_2 \wedge T_1) \vee (T_2 \wedge T_2)] \\ & & \cong \uparrow & \nearrow^{(T \wedge T) \wedge t_{T \wedge T, T \wedge T} \wedge (T \wedge T)} & \\ & & [(T_1 \wedge T_1) \vee (T_2 \wedge T_1)] \vee [(T_1 \wedge T_2) \vee (T_2 \wedge T_2)] & & \end{array}$$

kommutiert. Dabei geben die Indizes nur an, welche Inklusion von $T \wedge T$ in $(T \vee T) \wedge (T \vee T)$ gemeint ist. □

Als Beispiel eines Cogruppen-Objekt in einer simplizialen Modellkategorie haben wir:

Lemma 2.16. Sei M eine punktierte simpliziale Modellkategorie und A ein cofaserndes Objekt. Dann ist $A \wedge S^1$ ein Cogruppen-Objekt.

Beweis. Das folgt aus Lemma [Hov1, Lemma 6.1.2]. □

Bousfield-Lokalisierungen Hier werden nur kurz ein paar häufig benutzte Definitionen zu Bousfield-Lokalisierungen von simplizialen Modellkategorien gegeben. Die Referenz zu Bousfield-Lokalisierungen ist [Hi, Kapitel 3 bis 4].

Definition 2.17 ([Hi, Def. 3.1.4, 3.3.1]). Sei M eine simpliziale Modellkategorie und S eine Menge.

- Ein Objekt X von M heißt S -lokal, wenn es fasernd ist und für alle $f \in S$ die Abbildung $Map(f', X)$ eine schwache Äquivalenz ist, wobei f' eine cofasernde Approximation ([Hi, Def. 8.1.22]) von f ist.
- Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ von M heißt S -lokale Äquivalenz, falls für alle S -lokalen Objekte X von M die Abbildung $Map(f', X)$ eine schwache Äquivalenz ist, wobei f' eine cofasernde Approximation ([Hi, Def. 8.1.22]) von f ist.

- Die linke Bousfield-Lokalisierung (sofern sie existiert) von M bezüglich S ist eine Modellkategoriestruktur $L_S M$ auf der unterliegenden Kategorie M , so dass
 - die schwachen Äquivalenzen von $L_S M$ die S -lokalen Äquivalenzen sind, und
 - die Cofaserungen von $L_S M$ die Cofaserungen von M sind.

Bemerkung Wegen [Hi, Prop. 8.1.24] hängt die letzte Definition nicht von der Wahl der cofasernden Approximation ab. Dass obige Definition von S -lokalen Objekten und S -lokalen Äquivalenzen mit der in [Hi, Def. 3.1.4] übereinstimmt, folgt aus [Hi, Example 17.1.4] und [Hi, Theorem 17.5.31].

2.2 Fast endlich erzeugte Modellkategorien

In diesem Abschnitt wird der wichtige Begriff der fast endlich erzeugten Modellkategorien definiert, der wichtige Aussagen über schwache Äquivalenzen und fasernde Objekte impliziert.

Definition 2.18. [Hov2, Definition 4.1.]

- Eine cofasernd erzeugte Modellkategorie C ([Hi, Definition 11.1.2]) heißt endlich erzeugt, falls die Quell- und Zielobjekte der erzeugenden Cofaserungen I und der erzeugenden trivialen Cofaserungen J endlich dargestellt sind.
- Eine cofasernd erzeugte Modellkategorie C heißt fast endlich erzeugt, falls die Quell- und Zielobjekte der erzeugenden Cofaserungen I endlich dargestellt sind, und wenn es eine Menge von trivialen Cofaserungen J' gibt mit endlich dargestellten Quell- und Zielobjekten, sodass genau dann eine Abbildung f , deren Zielobjekt fasernd ist, eine Faserung ist, wenn f die rechte Hochhebungseigenschaft (siehe [Hi, 7.2.1]) bezüglich J' hat.

Bemerkung Die Definition von „endlich dargestellt“ ist nicht so stark wie die Definition [DRØ, Def. 2.3], wo statt sequentiellen Colimites auch beliebige filtrierte Colimites erlaubt sind.

Beispiel • Die simplizialen Mengen $\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda_k^n$ (Definition: [GJ, nach Beispiel 1.7]) sind endlich dargestellt ([Hov1, Lemma 3.1.2, S. 74]).

- Die Modellkategorie $sSet$ ([Hov1, Theorem 3.6.7]) hat als erzeugende Cofaserungen die Menge $I^{sSet} = \{\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n | n \geq 0\}$ und als erzeugende triviale Cofaserungen die Menge $J^{sSet} = \{\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n | 0 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ ([Hov1, Definition 3.2.1], [Hov1, Lemma 3.1.2, S. 74]). Nach dem letzten Punkt ist $sSet$ endlich dargestellt.
- Die Modellkategorie $sSet_*$ hat als erzeugende Cofaserungen die Menge I_+^{sSet} und als erzeugende triviale Cofaserungen die Menge J_+^{sSet} ([Hov1, Definition 3.2.1], [Hov1, Lemma 3.1.2, S. 74]). Nach dem vorletzten Punkt ist $sSet_*$ eine endlich erzeugte Modellkategorie (unter Benutzung der Adjunktion $sSet \rightleftarrows sSet_*$).
- Die Modellkategorie $M^{cm}(S)$ ist fast endlich erzeugt (siehe Prop. 2.49).

Lemma 2.19. Sei C eine fast endlich erzeugte Modellkategorie. Sei eine Abbildung f zwischen den beiden sequentiellen Diagrammen X und Y

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \cdots & X_n & \xrightarrow{x_n} & \cdots \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_n & & \\
 Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \cdots & Y_n & \xrightarrow{y_n} & \cdots
 \end{array}$$

gegeben.

- Sei $i : A \rightarrow B$ eine Abbildung in C zwischen endlichen dargestellten Objekten A und B , so dass alle Abbildungen $f_n, n \geq 0$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich i haben. Dann hat auch $\text{colim } f$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich i .
- Falls f_n triviale Faserungen sind, so auch $\text{colim } f$.

- (iii) Falls f_n Faserungen und $\text{colim } Y$ fasernd, dann ist $\text{colim } f$ eine Faserung.
- (iv) Insbesondere sind fasernde Objekte abgeschlossen unter sequentiellen Colimites.
- (v) Schwache Äquivalenzen sind abgeschlossen unter sequentiellen Colimites.

Beweis. (i) Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & \text{colim } X \\ \downarrow i & & \downarrow \text{colim } f \\ B & \xrightarrow{h} & \text{colim } Y \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Da nach Voraussetzung A und B endlich dargestellt sind, ist die Abbildungen

$$\text{colim}_n \mathcal{C}(A, X_n) \xrightarrow{(\mathcal{C}(A, \text{incl}_n))_n} \mathcal{C}(A, \text{colim}_n X)$$

und die entsprechende für B eine Bijektion. Wegen der Surjektivität dieser Abbildungen faktoriert g über ein $g' : A \rightarrow X_l$ und h über ein $h' : A \rightarrow X'_l$, wobei wir (nach eventueller Komposition mit mehreren x_n und y_n) annehmen können, dass $l = l'$. Wir haben also: $\text{incl}_l^Y \cdot [f_l \cdot g'] = \text{colim } f \cdot \text{incl}_l^X \cdot g' = \text{incl}_l^Y \cdot [h' \cdot i]$. Und wegen der Injektivität, gibt es ein $m \geq 0$, so dass $f_{l+m} \cdot [x_{l+m} \cdot \dots \cdot x_l \cdot g'] = y_{l+m} \cdot \dots \cdot y_l \cdot [f_l \cdot g'] = [y_{l+m} \cdot \dots \cdot y_l \cdot h'] \cdot i$. Also faktorisiert nach Umbenennung von g' und h' obiges Diagramm über:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g'} & X_l \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow f_l \\ B & \xrightarrow{h'} & Y_l \end{array}$$

für ein $l \geq 0$ (Diagramm mit durchgezogenen Pfeilen). Da f_l die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich i hat, gibt einen Lift (gestrichelter Pfeil) im obigen Diagramm und damit auch im ursprünglichen.

- (ii) $\text{colim } f$ ist eine triviale Faserung, wenn es die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich aller erzeugenden Cofaserungen I hat (siehe [Hi, Prop. 7.2.3]). Da nach Definition von „fast endlich erzeugt“ die Quell- und Zielobjekte der Elemente von I endlich dargestellt sind und jede Abbildung $f_n, n \geq 0$ eine triviale Faserung ist und daher die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich I hat, folgt aus (ii) aus (i)
- (iii) Da die Abbildungen $f_n, n \geq 0$ Faserungen mit fasernden Zielobjekt sind, haben sie die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich J' . Weil außerdem die Quell- und Zielobjekte der Elemente von J' endlich dargestellt sind, gelten die Voraussetzungen von (i). Damit hat $\text{colim } f$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich der Menge J' . Weil nach Voraussetzung $\text{colim } Y$ fasernd ist, gilt nach der Definition von „fast endlich erzeugt“ schließlich, dass $\text{colim } f$ eine Faserung ist.
- (iv) Dies folgt aus dem vorherigen Punkt durch Wahl von Y als triviales Diagramm an $*$.
- (v) Nach Corollar 2.7 genügt es zu zeigen, dass schwache Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten abgeschlossen unter sequentiellen Colimites sind. Seien also f_n schwache Äquivalenzen und X_n, Y_n fasernd. Wir benutzen [Hi, Lemma 7.7.1 (2)] (funktorielle Version), das erlaubt f in zwei Abbildungen $i : X \rightarrow Z$ und $f' : Z \rightarrow Y$ zu faktorisieren, $f = f' \cdot i$, sodass gilt: es gibt eine Abbildung $j : Z \rightarrow X$ mit $j \cdot i = 1$ und die Abbildungen $j_n, f'_n, n \geq 0$ sind triviale Faserungen. Nach Punkt (ii) sind dann auch $\text{colim } j, \text{colim } f'$ triviale Faserungen, also ist wegen $\text{colim } j \cdot \text{colim } i = 1_{\text{colim } X}$ auch die Abbildung $\text{colim } i$, und damit $\text{colim } f$ eine schwache Äquivalenz. □

Die folgende Proposition aus [Hov2, S. 16] zeigt, dass die Eigenschaft „fast endlich erzeugt“ unter einigen linken Bousfield-Lokalisierungen erhalten bleibt.

Proposition 2.20. *Sei M eine links-eigentliche, zelluläre, simpliziale Modellkategorie und S eine Menge von Cofaserungen von M zwischen cofasernden Objekten, so dass $X \otimes K$ für jedes Quell- und Zielobjekt X der Elemente von S und jedes endliche $K \in sSet$ endlich dargestellt ist.*

Falls M fast endlich erzeugt ist, so ist die linke Bousfield-Lokalisierung $L_S M$ von M an S auch fast endlich erzeugt.

Beweis. Da M fast endlich erzeugt ist, gibt es zwei Mengen I und J' , die die Eigenschaften in der Definition von „fast endlich erzeugt“ erfüllen. Da $L_S M$ die gleichen Cofaserungen und damit auch die gleichen trivialen Faserungen wie M hat, ist I auch eine Menge von erzeugenden Cofaserungen für $L_S M$ mit endlich dargestellten Quell- und Zielobjekten.

Wir wählen nun die Menge $J'' = J' \cup \Lambda(S)$ mit $\Lambda(S) := \{f \sqcup f' \mid f \in S, f' \in I^{sSet}\}$ (siehe Def. 2.3). Sie besteht aus trivialen Cofaserungen in $L_S M$, da die Modellstruktur $L_S M$ simplizial ist. Die Quell- und Zielobjekte von J'' sind endlich dargestellt, da diejenigen von J' es sind und nach Voraussetzung $X \otimes K$ für alle Quell- und Zielobjekte X von S und alle endlichen simplizialen Mengen K endlich dargestellt sind und somit auch alle endlichen Colimites von Objekten der Form $X \otimes K$.

Sei nun $g : A \rightarrow B$ eine Abbildung in $L_S M$ mit faserndem Zielobjekt B . Also ist B S -lokal. Falls g eine Faserung in $L_S M$ ist, so hat es die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich aller trivialen Cofaserungen und damit auch bezüglich J'' . Umgekehrt werde nun vorausgesetzt, dass g die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich J'' hat. Da B insbesondere in M fasernd ist und g die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich J' hat, ist g eine Faserung in M ist.

Es gilt, dass ein Objekt X in M genau dann S -lokal ist, wenn das Objekt X fasernd ist und die Abbildung $X \rightarrow *$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich der Menge $\Lambda(S)$ hat: Sei $f \in S$ und X in M fasernd. Dann ist die Abbildung $Map(f, X)$ eine Faserung von simplizialen Mengen, wobei Map der simpliziale Abbildungsraum ist. Also ist $Map(f, X)$ genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn es die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich I^{sSet} hat. Per Adjunktion ist dies dazu äquivalent, dass für alle $f' \in I^{sSet}$ die Abbildung $X \rightarrow *$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich $f \sqcup f'$ hat. Schließlich ist, da das Ziel- und Quellobjekt von f in M cofasernd ist, f schon eine cofasernde Ersetzung von f . Damit ist X genau dann S -lokal (siehe Def. 2.17), wenn $X \rightarrow *$ die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich $\Lambda(S)$ hat.

Dann ist A S -lokal, da sowohl $B \rightarrow *$ als auch $g : A \rightarrow B$ und somit deren Komposition die rechte Hochhebungseigenschaft bzgl. der Menge $\Lambda(S)$ hat. Dann ist g eine Faserung in M zwischen S -lokalen Objekten und nach [Hi, Prop. 3.3.16] eine Faserung in $L_S M$. Damit erfüllt J'' die entsprechenden Eigenschaften aus der Definition von „fast endlich erzeugt“ für $L_S M$. \square

2.3 Homotopietheorie von simplizialen Mengen

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Definitionen und Aussagen über die Homotopiekategorie der simplizialen Mengen und deren Homotopiegruppen gesammelt. Zunächst wird kurz auf den Zusammenhang zwischen topologischen Räumen und simplizialen Mengen eingegangen.

Definition 2.21. *Sei Top die Kategorie der kompakt erzeugten topologischen Räume zusammen mit den stetigen Abbildungen (siehe [Hov1, Def. 2.4.21]).*

Proposition 2.22 ([Hov1, Cor. 2.4.26 und Prop. 4.2.11]). *Die punktierte Kategorie Top_* zusammen mit der gewöhnlichen Modellstruktur, die in [Hov1, 2.4] definiert ist, ist eine cofasernde erzeugte symmetrisch monoidale Modellkategorie.*

Proposition 2.23 ([Hov1, Cor. 4.2.10]). *Die Modellkategorie $sSet_*$ ist symmetrisch monoidal.*

Proposition 2.24. 1. *Die Adjunktion $|-| : sSet_* \rightleftarrows Top_* : Sing$ ist eine Quillen-Äquivalenz.*

2. *Insbesondere gilt, dass eine Abbildung $f : K \rightarrow L$ in $sSet_*$ genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn $|f|$ dies ist, und alle Einheiten und Coeinheiten schwache Äquivalenzen sind. Außerdem haben wir eine Kategorienäquivalenz: $Ho(sSet_*) \rightarrow Ho(Top_*)$, $X \mapsto |X|$.*

3. *Der Funktor topologische Realisierung $|-| : sSet_* \rightarrow Top_*$ ist ein strikt symmetrisch monoidaler Funktor. Es gibt also Isomorphismen $r_{X,Y} : |X| \wedge |Y| \rightarrow |X \wedge Y|$, die assoziativ und mit S^0 verträglich sind.*

Beweisskizze. 1. Dies folgt aus den Aussagen von [Hov1, Theorem 3.6.7], [Hov1, Cor. 2.4.26] (und [Hov1, Cor. 1.3.15]).

2. Das folgt aus [Hov1, Cor. 1.3.16], denn alle Objekte in $sSet_*$ sind cofasernd und alle Objekte in Top_* fasernd.

3. Der dritte Teil folgt aus [Hov1, Lemma 3.2.4] zusammen mit [Hov1, Prop. 2.4.22, 4.]. \square

Proposition 2.25 ([Ba, Ch I, Prop. 8.15]). *Es gibt einen strikt symmetrisch monoidalen Funktor $-^+ : Top \rightarrow Top_*$, welcher einem Objekt aus Top seine Ein-Punkt-Kompaktifizierung zuordnet. Der Basispunkt ist dann der dazugekommene Punkt.*

Definition 2.26. *Die simpliziale 1-Sphäre S^1 ist $\Delta^1/\partial\Delta^1$. Wie in [Sch08] definieren wir die topologische 1-Sphäre S^1 als \mathbb{R}^+ . Entsprechend wird $S^k = (S^1)^{\wedge k}$ definiert (was mit der Definition in [Sch08] bis auf Isomorphie übereinstimmt).*

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Homotopiegruppen von simplizialen Mengen zu definieren. Zwei von ihnen werden im Folgenden behandelt, eine weitere etwas später.

Definition 2.27. *Für $X \in sSet_*$ definieren wir die k -te Homotopiegruppe als $\pi_k X = [S^k, X]$, wobei die Klammern die Morphismen in $Ho(sSet_*)$ bedeuten.*

Definition 2.28. *Sei $h : |S^1| \rightarrow S^1$ ein Isomorphismus in Top_* , z. B. der in [Sch09, S. 5 unten, (0.1)] definiert wird.*

Lemma 2.29. *Diese Definition stimmt mit der gewöhnlichen Definition überein, d.h. es gibt einen natürlichen Isomorphismus:*

$$\pi_k X \cong \pi_k |X|.$$

Beweis. Wegen Prop. 2.24 haben wir eine Bijektion $Ho(sSet_*)(S^k, X) \xrightarrow{|-|} Ho(Top_*)(|S^k|, |X|)$. Weiterhin ist:

$Ho(Top_*)(|S^k|, |X|) \cong Ho(Top_*)(S^k, |X|) \cong Top_*(S^k, |X|)/(Homotopierelation) = \pi_k(|X|)$, denn $S^k \wedge [0, 1]_+$ ist ein Zylinderobjekt für S^k . Letzter Isomorphismus folgt aus [DS, Proposition 5.11] \square

Die folgenden Lemmata und Corollar werden später, wenn es um die stabilen Homotopiegruppen von Spektren von simplizialen Mengen geht, wichtig sein.

Lemma 2.30. *Da der Funktor $-\wedge S^1$ schwache Äquivalenzen in $sSet_*$ erhält, induziert er in der Homotopiekategorie die natürliche Abbildung $\pi_k X \xrightarrow{-\wedge S^1} \pi_{k+1}(X \wedge S^1)$ für $X \in sSet_*$.*

Unter dem Isomorphismus in Lemma 2.29 ist diese Abbildung isomorph zu:

$$\pi_k |X| \rightarrow \pi_{k+1} |X \wedge S^1|, (S^k \xrightarrow{f} |X|) \mapsto (S^k \wedge S^1 \xrightarrow{f \wedge h^{-1}} |X| \wedge |S^1| \xrightarrow{r_{X, S^1}} |X \wedge S^1|)$$

Beweis. Wegen Natürlichkeit können wir annehmen, dass X fasernd ist. Dann folgt die Aussage aus folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} sSet_*(S^k, X) & \xrightarrow{|-|} & Top_*(|S^k|, |X|) & \xrightarrow{(r \cdot (h^{-1})^{\wedge k})^*} & Top_*(S^k, |X|) & \xrightarrow{-\wedge S^1} & Top_*(S^{k+1}, |X| \wedge S^1) \\ \downarrow -\wedge S^1 & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow (r \cdot (1 \wedge h^{-1}))^* & \\ sSet_*(S^{k+1}, X \wedge S^1) & \xrightarrow{|-|} & Top_*(|S^{k+1}|, |X \wedge S^1|) & \xrightarrow{(r \cdot (h^{-1})^{\wedge k+1})^*} & Top_*(S^{k+1}, |X \wedge S^1|) & & \end{array}$$

Es kommutiert, denn für eine Abbildung $f : S^k \rightarrow X$ in $sSet_*$ gilt: $|f \wedge S^1| \cdot r_{S^1, \dots, S^1, S^1} \cdot (h^{-1})^{\wedge k+1} = |f \wedge S^1| \cdot r_{S^k, S^1} \cdot (r_{S^1, \dots, S^1} \wedge |S^1|) \cdot (h^{-1})^{\wedge k+1} = r_{X, S^1} \cdot |f| \wedge |S^1| \cdot (r_{S^1, \dots, S^1} \wedge |S^1|) \cdot (|S^1|^{\wedge k} \wedge h^{-1}) \cdot ((h^{-1})^{\wedge k} \wedge S^1) = r_{X, S^1} \cdot (1 \wedge h^{-1}) \cdot (|f| \cdot r_{S^1, \dots, S^1} \cdot (h^{-1})^{\wedge k}) \wedge S^1.$ \square

Corollar 2.31. *Sei $\sigma_n^X : X_n \wedge S^1 \rightarrow X_{n+1}$ eine Abbildung in $sSet_*$ und definiere*

$$\sigma_n^{|X|} : |X_n| \wedge S^1 \xrightarrow{1 \wedge h^{-1}} |X_n| \wedge |S^1| \xrightarrow{r_{X_n, S^1}} |X_n \wedge S^1| \xrightarrow{\sigma_n^X} |X_{n+1}|.$$

Seien $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k + n \geq 2$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{k+n}|X_n| & \xrightarrow{-\wedge S^1} & \pi_{k+n+1}(|X_n| \wedge S^1) & \xrightarrow{\sigma_{n*}^{|X|}} & \pi_{k+n+1}|X_{n+1}| \\ \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\ \pi_{k+n}X_n & \xrightarrow{-\wedge S^1} & \pi_{k+n+1}(X_n \wedge S^1) & \xrightarrow{\sigma_{n*}^X} & \pi_{k+n+1}X_{n+1} \end{array}$$

Beweis. Wegen Lemma 2.30 und Natürlichkeit kommutieren die Teile des erweiterten Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{k+n}|X_n| & \xrightarrow{-\wedge S^1} & \pi_{k+n+1}(|X_n| \wedge S^1) & \xrightarrow{\sigma_{n*}^{|X|}} & \pi_{k+n+1}|X_{n+1}| \\ \downarrow \cong & & \downarrow (r_{X_n, S^1}(1 \wedge h^{-1}))_* & \nearrow \sigma_{n*}^X & \downarrow \cong \\ & & \pi_{k+n+1}|X_n \wedge S^1| & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_{k+n}X_n & \xrightarrow{-\wedge S^1} & \pi_{k+n+1}(X_n \wedge S^1) & \xrightarrow{\sigma_{n*}^X} & \pi_{k+n+1}X_{n+1} \end{array}$$

□

Lemma 2.32. Falls $X \in sSet_*$ fasernd ist, gibt es einen natürlichen Isomorphismus:

$\alpha_X : \pi_k \Omega X \rightarrow \pi_{k+1} X$ so dass für eine Abbildung $f : X \wedge S^1 \rightarrow Y$ in $sSet_*$ mit Y fasernd gilt:

$$\begin{array}{ccc} \pi_k X & \xrightarrow{-\wedge S^1} & \pi_{k+1}(X \wedge S^1) \\ \downarrow \hat{f}_* & & \downarrow f_* \\ \pi_k \Omega Y & \xrightarrow{\alpha_Y} & \pi_{k+1} Y \end{array}$$

kommutiert. Dabei ist \hat{f} das Adjungierte zu f .

Beweis. Dies folgt aus Lemma 2.8 für $M = sSet_*, T = S^1, A = S^k$, denn $-\wedge T$ erhält auch schwache Äquivalenzen. □

Die folgende Aussage wird gebraucht, wenn die zwei Definitionen von stabilen Äquivalenzen von Spektren von simplizialer Mengen verglichen werden (Corollar 3.33).

Lemma 2.33. Falls $X_0 \xrightarrow{i_0} X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} \dots$ eine über \mathbb{N} indizierte Folge von Abbildungen in $sSet_*$ ist, ist

$$\operatorname{colim}_{l \geq 0} \pi_k(X_l) \xrightarrow{\operatorname{colim} \pi_k(\operatorname{incl})} \pi_k(\operatorname{colim}_{l \geq 0} X_l)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Das folgt aus Lemma 2.10 mit $M = sSet_*, A = S^k$, denn S^k und $S^k \wedge \Delta_+^1$ sind kleine simpliziale Mengen [Hov1, Lemma 3.1.2] und $sSet_*$ ist fast endlich erzeugt und damit sind sequentielle Colimites von fasernden Objekten wieder fasernd (Lemma 2.19). □

Ein Lemma über Basispunkte Die dritte Definition von Homotopiegruppen simplizialer Mengen wird im Beweis der letzten Aussage dieses Abschnitts benutzt.

Definition 2.34. Für fasernde simpliziale Mengen X und Basispunkte $v \in X_0$ werden die (simplizialen) Homotopiegruppen wie folgt definiert: $\pi_r(X, v)$ ist die Menge der Abbildungen von Paaren $(\Delta^r, \partial \Delta^r) \xrightarrow{f} (X, v)$ modulo der simplizialen Homotopierelation von Paaren simplizialer Mengen. Dabei ist eine Abbildung von Paaren $(A, A_0) \xrightarrow{f} (B, B_0)$ eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $f(A_0) \subseteq B_0$.

Diese simplizialen Homotopiegruppen stimmen mit denen der Realisierung überein und damit auch mit den schon definierten Homotopiegruppen von simplizialen Mengen:

Lemma 2.35 ([Hov1, Prop. 3.6.3]). Für eine fasernde simpliziale Menge X und einem Punkt $v \in X_0$ gibt es einen Isomorphismus $\pi_r(X, v) \cong \pi_r(|X|, |v|)$.

Corollar 2.36. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von fasernden simplizialen Mengen ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $\pi_0(f)$ und $\pi_r(f, x_0)$ für alle $r \in \mathbb{N}, x_0 \in X_0$ Bijektionen sind.

Lemma 2.37. 1. Sei X eine fasernde simpliziale Menge und $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$ ein 1-Simplex von X . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\gamma_* : \pi_r(X, \gamma(0)) \cong \pi_r(X, \gamma(1))$. Dabei ist dieser in dem Sinne natürlich, dass für eine Abbildung zwischen fasernden simplizialen Mengen $f : X \rightarrow Y$ das entsprechende Diagramm mit $(f\gamma)_* : \pi_r(Y, f(\gamma(0))) \cong \pi_r(Y, f(\gamma(1)))$ kommutiert.

2. Falls $H : U \times \Delta^1 \rightarrow V$ eine simpliziale Homotopie von (unpunkteten) simplizialen Mengen U und V ist und $c \in A_0, r \in \mathbb{N}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $\pi_r(H(-, 0), c)$ ist eine Bijektion
- $\pi_r(H(-, 1), c)$ ist eine Bijektion

Beweis. 1. Der Isomorphismus ordnet der Homotopieklasse, die zu einem Repräsentanten $f : \Delta^r \rightarrow X$ gehört, die Homotopieklasse von $F|_{\Delta^r \times 1}$ zu, wobei F eine Fortsetzung der Abbildung

$\Delta^r \times 0 \cup \partial\Delta^r \times \Delta^1 \xrightarrow{(f, \gamma)} X$ entlang $\Delta^r \times 0 \cup \partial\Delta^r \times \Delta^1 \subseteq \Delta^r \times \Delta^1$ ist. Diese Fortsetzung existiert, da letzte Abbildung als Pushout-Produkt von $0 \subseteq \Delta^1$ und $\partial\Delta^r \subseteq \Delta^r$ eine triviale Cofaserung ist. Die Wohldefiniertheit und Bijektivität folgt dann aus [GJ, 8. Fundamental groupoid]. Die Natürlichkeit folgt unmittelbar aus der Konstruktion, denn die Verkettung einer Fortsetzung F für X mit $f : X \rightarrow Y$ ergibt eine entsprechende Fortsetzung für Y .

2. Wir zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(U, c) & \xrightarrow{H(-, 0)_*} & \pi_r(V, H(c, 0)) \\ & \searrow H(-, 1)_* & \cong \downarrow H(c, -)_* \\ & & \pi_r(V, H(c, 1)) \end{array}$$

wobei die rechte Abbildung von dem 1-Simplex $H(c, -)$ induziert wird.

Sei $f : (\Delta^r, \partial\Delta^r) \rightarrow (U, c)$ ein Repräsentant. Setze $H' := H \circ (f \times \Delta^1)$. Es gibt einen Lift in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta^r \times \Delta^1 \times 0 \cup (\Delta^r \times 1 \cup \partial\Delta^r \times 0) \times \Delta^1 & \xrightarrow{(H', H' \circ pr_{\Delta^r \times 1}, H(c, -) \circ pr_{\Delta^1})} & V \\ \downarrow & \dashrightarrow \tilde{H} & \\ \Delta^r \times \Delta^1 \times \Delta^1 & & \end{array}$$

Dann ist $H(-, 0)_*([f]) = [H'(-, 0)]$ und $H(c, -)_*[H'(-, 0)] = [\tilde{H}(-, 0, 1)]$ nach obiger Konstruktion das Bild davon in $\pi_r(V, H(c, 1))$. Schließlich ist $H(-, 1)_*([f]) = [H'(-, 1)] = [\tilde{H}(-, 1, 1)]$. Also sind beide Elemente gleich (mit Homotopie $\tilde{H}(-, -, 1)$) und das Diagramm kommutiert. \square

Das folgende Lemma wird hilfreich sein, wenn stabile Homotopiegruppen mit stabilen Äquivalenzen in Zusammenhang gebracht werden:

Lemma 2.38 ([Sch07V]). Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung zwischen punktierten fasernden simplizialen Mengen. Die Abbildung $\Omega f : \Omega A \rightarrow \Omega B$ ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $\pi_r(\Omega f, c)$ für alle $r \geq 0$ Isomorphismen sind, wobei $c \in (\Omega A)_0$ ist ein Basispunkt. Zusätzlich gilt: falls es eine Abbildung $g : C \rightarrow D$ von punktierten fasernden simplizialen Mengen gibt, mit einem Zickzack aus schwachen Äquivalenzen zwischen Abbildungen von fasernden simplizialen Mengen von g zu einer Abbildung der Form Ωf , dann gilt: g ist eine schwache Äquivalenz genau dann, wenn $\pi_r(g, c)$ für alle $r \geq 0$ Isomorphismen sind, wobei c ein beliebiger Basispunkt ist.

Beweis. • Die punktierten fasernden simplizialen Mengen ΩA und ΩB sind bis auf punktierte simpliziale Homotopie Gruppen und Ωf ein Gruppenhomomorphismus. Dies gilt zunächst nur in $Ho(sSet_*)$ wegen [Hov1, Cor. 6.1.6], aber wegen der Eigenschaft fasernd zu sein kommen die Abbildungen schon aus $sSet_*$.

Falls $c, y \in (\Omega A)_0$ ist, so induziert die Multiplikation $-\cdot y : (\Omega A, c) \rightarrow (\Omega A, cy)$ auf Homotopiegruppen Isomorphismen. Denn die Kompositionen $(-\cdot y^{-1}) \circ (-\cdot y)$ und $(-\cdot y) \circ (-\cdot y^{-1})$ sind (unpunktirt) homotop zur Identität und daher induzieren sie nach Lemma 2.37 Isomorphismen auf Homotopiegruppen. Damit hat $\pi_r(-\cdot y, c)$ ein Linksinverses und $\pi_r(-\cdot y, cy^{-1})$ ein Rechtsinverses. Letztere Abbildung ist, wenn man für c den Punkt cy einsetzt, isomorph zu $\pi_r(-\cdot y, c)$ (nach Lemma 2.37). Also ist $\pi_r(-\cdot y, c)$ ein Isomorphismus.

Weiterhin sind für $x_0, c \in (\Omega A)_0$ die beiden Kompositionen $(-\cdot (\Omega f)(c^{-1}x_0)) \circ (\Omega f)$ und $(\Omega f) \circ (-\cdot c^{-1}x_0)$ zueinander homotop. Nach Lemma 2.37 und letzter Aussage gilt dann, dass $\pi_r(\Omega f, c)$ genau dann eine Bijektion ist, wenn $\pi_r(\Omega f, c(c^{-1}x_0))$ eine Bijektion ist. Letztere Abbildung ist isomorph zu $\pi_r(\Omega f, x_0)$ (Lemma 2.37). Damit gilt Ωf ist genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $\pi_r(\Omega f, c)$ eine Bijektion ist.

• Um die zweite Aussage zu beweisen, betrachten wir die folgende Eigenschaft $P(g)$ einer Abbildung $g : C \rightarrow D$ von simplizialen Mengen: wenn $c \in C_0$ ein beliebiger Basispunkt ist und für alle $r \geq 0$ $\pi_r(g, c)$ eine Bijektion ist, dann ist g eine schwache Äquivalenz. Das Diagramm von fasernden simplizialen Mengen

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sim a} & C' \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ D & \xrightarrow{\sim b} & D' \end{array}$$

möge kommutieren und a und b seien schwache Äquivalenzen. Es genügt nun mit Hilfe der ersten Aussage dies zu zeigen: $P(g) \Leftrightarrow P(g')$.

Für jedes $c \in C_0$ gilt dann: $\pi_r(g, c) \cong \pi_r(g', a(c))$. Daraus folgt sofort „ \Leftarrow “.

Sei $c' \in C'_0$ beliebig. Da $\pi_0(a)$ surjektiv ist, gibt es $c \in C_0$ und $\gamma : \Delta^1 \rightarrow C'$ mit $\gamma(0) = a(c)$, $\gamma(1) = c'$. Nun kommutiert (Lemma 2.37):

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(C', a(c)) & \xrightarrow[\gamma_*]{\cong} & \pi_r(C', c') \\ \downarrow \pi_r(g', a(c)) & & \downarrow \pi_r(g', c') \\ \pi_r(D', g'(a(c))) & \xrightarrow[(g' \gamma)_*]{\cong} & \pi_r(D', g'(c')) \end{array}$$

wobei die horizontalen Isomorphismen durch γ bzw. $g' \cdot \gamma$ induziert sind. Mit anderen Worten: für jedes $c' \in C'_0$ gibt es ein $c \in C_0$ mit $\pi_r(g, c) \cong \pi_r(g', c')$. Daraus folgt „ \Rightarrow “.

2.4 Die motivische un stabile Homotopiekategorie

In den folgenden Kapiteln werden wir verschiedene motivische Modellstrukturen benutzen. Diese Modellstrukturen haben die gleichen schwachen Äquivalenzen, also auch die gleiche Homotopiekategorie, aber unterschiedliche Cofaserungen. Die Modellstrukturen haben einige Eigenschaften gemeinsam, andere aber wiederum nicht. Deswegen ist es notwendig, immer die jeweils passende Modellstruktur zu benutzen. Diese Modellstrukturen sind die motivisch injektive, die motivisch abgeschlossen-flasque und die motivisch projektive Modellstruktur.

Sei S ein noethersches Schema von endlicher Krull-Dimension. Bezeichne Sm/S die Kategorie der glatten S -Schemata von endlichem Typ. (Die benutzen Aussagen aus [PPR1] sind zwar nur für quasi-projektiven glatte S -Schemata formuliert, aber deren Beweise benutzen diese Voraussetzung nicht). Wegen der Endlichkeitsbedingungen hat Sm/S ein kleines Skelett $(Sm/S)'$ (siehe [DLØRV, S. 185]).

Definition 2.39 ([PPR1, Def. A.1.1]). • Ein motivischer Raum (über S) ist ein Funktor $A : (Sm/S)^{op} \rightarrow sSet$. Die Kategorie der motivischen Räume (über S) zusammen mit den natürlichen Transformationen wird mit $M(S)$ bezeichnet. Sei $M(S) := M(S)_*$ die zugehörige punktierte Kategorie.

- Wir haben Inklusionsfunktoren: $h : Sch/S \hookrightarrow M(S), X \mapsto (Sch/S)(-, X)$ und $h. : Sch/S \hookrightarrow M(S), X \mapsto (Sch/S)(-, X)_+$ sowie $sSet_* \hookrightarrow M(S)$, welcher ein Objekt auf den konstanten Funktor an dem Objekt schickt. Manchmal wird U_+ kurz für $h.(U)$ geschrieben.

Die Kategorie $M(S)$ ist abgeschlossen symmetrisch monoidal mit objektweise definiertem Smash-Produkt $A \wedge B : (A \wedge B)(X) := A(X) \wedge B(X)$, internen Hom-Objekt $Hom_{M(S)}(A, B)(X)_n := M(S)(A \wedge h.(X) \wedge \Delta_+^n, B)$ und Einheitsobjekt S^0 .

Die motivisch injektive Modellkategorie wird in [Ja2] beschrieben:

Theorem 2.40. Die Kategorie $M(S)$ zusammen mit den Monomorphismen als Cofaserungen und motivischen schwachen Äquivalenzen (Def. [Ja2, 1.1 Motivic homotopy theory]) bildet eine eigentliche simpliziale Modellkategorie ([Ja2, Theorem 1.1]). Entsprechend hat auch die punktierte Kategorie $M.(S)$ eine induzierte Modellstruktur ([Hov1, Prop. 1.1.8]).

Im Folgenden werden wir die punktierte motivisch abgeschlossen-flasque Modellkategorie $M.^{cm}(S)$ aus [PPR1, A.3] definieren.

Definition 2.41. Sei $\{i^j : Z^j \rightarrow X \mid j = 1, \dots, m\}, m \in \mathbb{N}_0$ eine (möglicherweise leere) endliche Menge abgeschlossener Immersionen in $(Sm/S)'$. Wir können die kategorielle Vereinigung $\bigcup_{j=1}^m h(Z^j)$ in $M(S)$ bilden, welche durch den Colimes des Diagramms

$$\coprod_{i \neq j} h(Z_i) \times_{h(X)} h(Z_j) \rightrightarrows \coprod_i h(Z_i)$$

gegeben ist. Der induzierte Morphismus $i : \bigcup_{j=1}^m h(Z^j) \hookrightarrow h(X)$ ist ein Monomorphismus, denn $h(i^j)$ waren Monomorphismen. Ein solcher Morphismus i wird akzeptabel genannt. Der Monomorphismus $\emptyset \hookrightarrow h(X)$ ($m = 0$) ist insbesondere auch akzeptabel. Die Menge aller akzeptablen Monomorphismen werde mit Akz bezeichnet. Sei I_S^c die Menge aller Morphismen $i_+ \sqcup g_+$ in $M.(S)$ mit $i \in \text{Akz}$ und $g \in I^{sSet}$ sowie J_S^c die Menge aller Morphismen $i_+ \sqcup g_+$ in $M.(S)$ mit $i \in \text{Akz}$ und $g \in J^{sSet}$. Für die Definition von I^{sSet}, J^{sSet} siehe Abschnitt 2.2.

Definition 2.42 ([PPR1, Def. A.3.1]). Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung in $M.(S)$.

- f ist eine schematische (oder objektweise) schwache Äquivalenz, falls $f(X)$ für alle $X \in Sm/S$ eine schwache Äquivalenz ist.
- f ist eine abgeschlossene schematische Faserung, falls f die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich J_S^c hat.
- f ist eine abgeschlossene Cofaserung, falls es die linke Hochhebungseigenschaft bezüglich aller abgeschlossenen schematischen Faserungen hat, die gleichzeitig schematische schwache Äquivalenzen sind.

Theorem 2.43 ([PPR1, Theorem A.3.9]). Die Kategorie $M.(S)$ zusammen mit den Morphismenklassen aus Definition 2.42 bildet eine symmetrisch monoidale Modellkategorie, die mit $M^{cs}(S)$ bezeichnet werde.

Proposition 2.44. Die Modellkategorie $M^{cs}(S)$ ist links-eigentlich und zellulär mit erzeugenden Cofaserungen und trivialen Cofaserungen I_S^c bzw J_S^c . Außerdem ist sie endlich erzeugt (Def. 2.18).

Beweis. • Offenbar ist die Modellkategorie $M^{cs}(S)$ links-eigentlich, weil in ihr schwache Äquivalenzen genau die objektweisen schwachen Äquivalenzen sind, Cofaserungen auch Monomorphismen sind und die Modellkategorie $sSet_*$ links-eigentlich ist.

- Wir prüfen die Voraussetzung des [Hi, Theorem 12.1.9] nach, das die Zellularität impliziert. Nach Voraussetzung und dem Beweis von [Is, Lemma 3.9] folgen die ersten beiden Punkte. Die Quell- und Zielobjekte der Elemente von I_S^c und J_S^c sind endlich dargestellt (nach [DRØ, Def. 2.3]), denn diese Objekte sind endliche Colimites von Objekten der Form $h.(U) \wedge K, K \in sSet_*$ endlich, und damit nach [DRØ, Lemma 2.5] endlich dargestellt. Also ist $M^{cs}(S)$ endlich erzeugt. Abgeschlossene Cofaserungen sind Monomorphismen in $M.(S)$ und diese wiederum effektive Monomorphismen, denn dies gilt schon für Mengen und Egalisatoren für Funktorkategorien werden objektweise gebildet. Die Kompaktheit der Quell- und Zielobjekte von I^c folgt aus einem Argument von Hirschhorn, das in [Hor, Lemma 3.5] wiedergegeben wird.

□

Lemma-Definition 2.45 ([Se, 3.6.10-14]). Sei (\mathcal{D}, \otimes) eine simpliziale Modellkategorie. Dann ist der Abbildungszylinder $Cyl(f)$ einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{D} durch das Pushout-Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \partial \Delta^1 & \xrightarrow{\cong} & A \amalg A \xrightarrow{A \amalg f} A \amalg B \\ \downarrow A \otimes incl & & \downarrow \\ A \otimes \Delta^1 & \longrightarrow & Cyl(f) \end{array}$$

Wir bekommen zwei Abbildungen: $h : A \rightarrow \text{Cyl}(f)$ definiert durch $A \cong A \otimes \Delta^0 \xrightarrow{A \otimes \text{incl}_1} A \otimes \Delta^1 \rightarrow \text{Cyl}(f)$ und $p : \text{Cyl}(f) \rightarrow B$ definiert durch das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow A \otimes \text{incl}_0 & & \downarrow 1 \\ A \otimes \Delta^1 & \xrightarrow{f \cdot p_A} & B \end{array}$$

wobei $p_A = (A \otimes \Delta^1 \xrightarrow{A \otimes s^0} A \otimes \Delta^0 \cong A)$ ist. Die Abbildung f lässt sich dann zerlegen in $A \xrightarrow{h} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{p} B$. Falls A und B cofasernd sind, so ist h eine Cofaserung, $\text{Cyl}(f)$ cofasernd und $p : \text{Cyl}(f) \rightarrow B$ eine simpliziale Homotopieäquivalenz. Insbesondere ist f genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn $h : A \rightarrow \text{Cyl}(f)$ es ist.

Definition 2.46. Wir wollen nun die linke Bousfield-Lokalisierung der Modellstruktur $M^{cs}(S)$ bezüglich der Menge $\mathcal{S} = \{f \sqcup g_+ \mid f \in \mathcal{S}_0, g \in I^{sSet}\}$ betrachten. Dabei ist \mathcal{S}_0 die Menge bestehend aus Abbildungen der Form

$$\begin{array}{ccc} h.(X) & \xrightarrow{h.(incl_0)} & h.(\mathbb{A}_S^1 \times_S X), X \in (Sm/S)' \\ & & \longleftarrow \\ & & h.(\emptyset) \end{array}$$

$$U_+ \cup_{V_+} \text{Cyl}(j'_+) \longrightarrow \text{Cyl}(U_+ \cup_{V_+} \text{Cyl}(j'_+) \rightarrow X_+)$$

wobei letzte Abbildung von einem Nisnevich-Quadrat Q in $(Sm/S)'$ herkommt:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

Theorem 2.47. Die linke Bousfield-Lokalisierung von $M^{cs}(S)$ bezüglich \mathcal{S} existiert und ist eine links-eigentliche, zelluläre, simpliziale und symmetrisch monoidale Modellkategorie. Sie wird mit $M^{cm}(S)$ bezeichnet und ihre Homotopiekategorie mit $H^{cm}(S)$. Die S -lokalen Faserungen werden abgeschlossene motivische Faserungen genannt. Die S -lokalen Äquivalenzen werden motivische schwache Äquivalenzen genannt.

Beweis. Bis auf die Monoidalität (siehe [PPR1, Thm. A.3.9]) folgt dies aus [Hi, Theorem 4.1.1] zusammen mit Proposition 2.44. \square

Bemerkung Die motivisch projektive Modellstruktur auf $M.(S)$ wird in [DRØ, 2.1] konstruiert. Dort wird auch gezeigt, dass die schwachen Äquivalenzen in der motivisch projektiven Modellstruktur mit den schwachen Äquivalenzen der (punktieren) motivisch injektiven Modellstruktur übereinstimmen (siehe [DRØ, Theorem 2.17]). Die Konstruktion der motivisch abgeschlossen-flasquen und motivisch projektiven Modellstruktur unterscheiden sich nur darin, dass die objektweise Modellstruktur, mit dessen Hilfe die motivisch projektive Modellstruktur konstruiert wird, weniger erzeugende Cofaserungen und triviale Cofaserungen hat, nämlich nur die von der Form $\{h.(U) \wedge (\partial \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n)_+ \mid n \geq 0, U \in Sm/S\}$ bzw. $\{h.(U) \wedge (\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n)_+ \mid 0 \leq i \leq n, U \in Sm/S\}$ (siehe [DRØ, Theorem 2.7] und vergleiche mit Def. 2.41).

Proposition 2.48. Die schwachen Äquivalenzen der motivisch projektiven und der motivisch abgeschlossen-flasquen Modellstruktur stimmen überein.

Beweis. Sei \mathcal{M}_{sc} die objektweise projektive Modellstruktur aus [DRØ, Notation 2.8] und \mathcal{M}_{mo} die motivisch projektive Modellstruktur (siehe [DRØ, Notation 2.13]). Die fasernden Objekte A der Modellstrukturen \mathcal{M}_{mo} und $M^{cm}(S)$ sind solche Objekte, die in der entsprechenden objektweisen Modellstruktur fasernd sind, und für die gilt (siehe [DRØ, Def. 2.10]):

- $A(\emptyset)$ ist zusammenziehbar,

- für alle $U \in Sm/S$ ist $A(U \xrightarrow{inco} U \times_S \mathbb{A}_S^1)$ eine schwache Äquivalenz, und
- für jedes Nisnevich-Quadrat Q ist $A(Q)$ ein Homotopie-Pullback-Quadrat ([Hi, Def. 13.3.12], siehe auch [Hi, Thm. 13.1.13]).

Diese drei Eigenschaften bleiben unter objektweise schwachen Äquivalenzen erhalten (siehe [Hi, Prop. 13.3.13]). Außerdem ist ein cofasernder Ersetzungsfunktor Q für \mathcal{M}_{sc} , auch einer für $M^{cs}(S)$.

Sei nun f eine schwache Äquivalenz in \mathcal{M}_{mo} und A in $M^{cm}(S)$ fasernd. Da Faserungen in $M^{cs}(S)$ auch Faserungen in \mathcal{M}_{sc} sind, ist Z auch in \mathcal{M}_{mo} fasernd. Damit ist $Map(Qf, Z)$ eine schwache Äquivalenz. Also ist f in $M^{cm}(S)$ eine schwache Äquivalenz.

Sei umgekehrt f eine schwache Äquivalenz in $M^{cm}(S)$ und A in \mathcal{M}_{mo} fasernd. Sei A' eine fasernde Ersetzung von A in $M^{cs}(S)$. Es gibt also eine objektweise schwache Äquivalenz $A \rightarrow A'$ zwischen in $M^{cs}(S)$ fasernden Objekten. Also ist A' nach der obigen Bemerkung auch in $M^{cm}(S)$ fasernd. Somit sind die Abbildungen $Map(Qf, A)$ und $Map(Qf, A')$ zueinander schwach äquivalent, und letztere eine schwache Äquivalenz. Nach [DRØ, Def. 2.11] ist dann f in \mathcal{M}_{mo} eine schwache Äquivalenz. \square

Proposition 2.49. *Die Modellkategorie $M^{cm}(S)$ ist fast endlich erzeugt (siehe Def. 2.18).*

Beweis. Da die Abbildungen von S abgeschlossene Cofaserungen zwischen abgeschlossen cofasernden Objekten sind, und für jedes Quell- und Zielobjekt X von diesen der Raum $X \wedge K_+$ endlich dargestellt ist (siehe die Argumentation für Endlichkeit in Prop. 2.44), folgt mit den Propositionen 2.44 und 2.20 die Behauptung. \square

Definition 2.50. *Sei $sShv.(S) := sShv.((Sm/S)_{Nis})$ die Kategorie der punktierten simplizialen Garben auf der Kategorie Sm/S zusammen mit der Nisnevich-Topologie (siehe [Mo, Def. 3.1.2]).*

Lemma 2.51 ([PPR1, S. 29 unten]). *Der Inklusionsfunktork $i : sShv.(S) \hookrightarrow M.(S)$ hat einen Linksadjungierten $a : M.(S) \rightarrow sShv.(S)$, der endliche Produkte erhält und für den $a \cdot i \cong id$ gilt. Der Funktor a ist strikt symmetrisch monoidal.*

Lemma 2.52. *Sei $X \in M.(S)$. Dann ist die Abbildung $X \rightarrow a(X)$ eine motivisch schwache Äquivalenz.*

Beweis. Dies folgt aus [Ja1, Lemma 2.6] und der Definition der motivisch injektiven Modellstruktur in [Ja2, 1.1]. \square

Proposition 2.53. *Das Bilden des Smash-Produkts $- \wedge A$ mit einem punktierten motivischen Raum A erhält motivische schwache Äquivalenzen. Falls $f, g : A \rightarrow B$ zwei Abbildungen in $M.(S)$ sind, die in $Ho(M^{cm}(S))$ gleich sind, und C in $M.(S)$, so sind auch $f \wedge C$ und $g \wedge C$ in $Ho(M^{cm}(S))$ gleich.*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus [DRØ, Lemma 2.20].

Zur Abkürzung sei $M := M^{cm}(S)$. Der Funktor

$$- \wedge C : M \rightarrow M$$

schickt schwache Äquivalenzen auf schwache Äquivalenzen. Wir haben daher ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{- \wedge C} & M \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ Ho(M) & \xrightarrow{\dots\dots\dots - \wedge C} & Ho(M) \end{array}$$

wobei γ die entsprechenden Lokalisierungsfunktoren sind und der gestrichelte Strich den Linksderivierten von $- \wedge C$ bezeichnet. Aus der Kommutativität folgt dann die zweite Aussage. \square

Lemma-Definition 2.54. *Sei $f : A \rightarrow B$ ein Monomorphismus in $M.(S)$ zwischen projektiv cofasernden Objekten. Dann induziert die Abbildung $Cyl(f) \rightarrow B$ eine objektweise schwache Äquivalenz $B//A := Cyl(f)/A \rightarrow B/A$, wobei $B//A$ projektiv cofasernd ist.*

Beweis. Der Beweis läuft genauso wie der Beweis in [Se, Lemma 7.2.2]. Nach dem letzten Lemma ist $h : A \rightarrow Cyl(B)$ eine projektive Cofaserung, damit insbesondere ein Monomorphismus und $p : Cyl(f) \rightarrow B$ eine objektweise schwache Äquivalenz. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm in $sSet_*$ für alle $U \in Sm/S$:

$$\begin{array}{ccccc} * (U) & \longleftarrow & A(U) & \xrightarrow{h(U)} & Cyl(f)(U) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow p(U) \\ * (U) & \longleftarrow & A(U) & \xrightarrow{f(U)} & B(U) \end{array}$$

Da $sSet_*$ links eigentlich ist, folgt, dass die Abbildung auf Pushouts eine schwache Äquivalenz ist (siehe [Hi, Prop. 13.5.4]). \square

2.5 Das Vorzeichen $(-1)_T$ und die Wirkung der symmetrischen Gruppe

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften des Vorzeichen des topologischen Kreises axiomatisiert, die für die Definition der \mathcal{M} -Wirkung auf den verallgemeinerten stabilen Homotopiegruppen gebraucht werden. Anschließend werden zwei Beispiele für Vorzeichen besprochen, eines in der Modellkategorie der punktierten simplizialen Mengen und eines in der punktierten motivischen Räume.

Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine symmetrisch monoidale Modellkategorie.

2.5.1 Definition

Definition 2.55. Falls T ein Objekt in \mathcal{D} ist, so setze $T^n := T^{\wedge n}$.

Definition 2.56. Ein Vorzeichen eines cofasernden Objektes T in \mathcal{D} ist ein Automorphismus $(-1)_T$ von T in $Ho(\mathcal{D})$ der Ordnung 2, mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. Für $\tau \in \Sigma_n$ gilt: die Permutation der Smash-Faktoren $T^n \xrightarrow{\tau} T^n$ stimmt in der Homotopiekategorie mit $|\tau|_T \wedge T^{n-1}$ (diese Abbildung ist definiert, weil T cofasernd ist, siehe 2.11) überein, wobei $|\tau|_T = (-1)_T$ gesetzt wird, falls τ eine ungerade Permutation ist, und sonst $|\tau|_T = 1$. $|\tau|_T$ wird auch das Vorzeichen der Permutation τ genannt.
2. $T^2 \xrightarrow{(-1)_T \wedge 1_T} T^2$ stimmt in der Homotopiekategorie mit $T^2 \xrightarrow{1_T \wedge (-1)_T} T^2$ überein.

2.5.2 Das Vorzeichen des simplizialen Kreises

Sei $\mathcal{D} = sSet_*$ (siehe 2.3) mit dem üblichen Smash-Produkt. Wir definieren nun das Vorzeichen des simplizialen Kreises S^1 .

Definition 2.57. Sei $h : |S^1| \cong S^1$ der Isomorphismus aus Def. 2.28. Wir erhalten (nach Prop. 2.24) eine schwache Äquivalenz $\nu : S^1 \xrightarrow{\sim} Sing(|S^1|) \xrightarrow{h} Sing(\mathbb{R}^+)$ in $sSet_*$. Die Abbildung $(-1)_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t$ induziert dann in der Homotopiekategorie $Ho(sSet_*)$ den Automorphismus

$$(-1)_{S^1} = \nu^{-1} \cdot Sing((-1)_{\mathbb{R}}^{\dagger}) \cdot \nu$$

von S^1 , der das Vorzeichen von S^1 genannt wird. Sein Quadrat ist offensichtlich die Identität von S^1 .

Bemerkung Insbesondere hat $(-1)_{\mathbb{R}^+}$ den Grad -1 .

Lemma 2.58. Der Automorphismus $(-1)_{S^1}$ ist ein Vorzeichen des Objektes S^1 .

Beweis. Um die Eigenschaften aus Def. 2.56 zu überprüfen, d.h. Gleichheit von Morphismen in $Ho(sSet_*)$, reicht es dies nach topologischer Realisierung in $Ho(Top_*)$ zu tun (Prop. 2.24).

Es genügt, die Gleichheiten nach Konjugation mit dem kanonischen Isomorphismus

$$|(S^1)^{\wedge n}| \rightarrow |S^1|^{\wedge n} \xrightarrow{h^{\wedge n}} (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} \rightarrow \mathbb{R}^{n+}$$

zu überprüfen, wobei benutzt wurde, dass $-^+$ strikt monoidal ist. Das Konjugieren der Permutation $\tau : (S^1)^{\wedge n} \rightarrow (S^1)^{\wedge n}$ ergibt dann die Abbildung $\mathbb{R}^{n+} \xrightarrow{\tau^+} \mathbb{R}^{n+}$, denn

$$\begin{array}{ccccccc} |(S^1)^{\wedge n}| & \cong & |S^1|^{\wedge n} & \cong & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} & \cong & \mathbb{R}^{n+} \\ \downarrow |\tau| & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau^+ \\ |(S^1)^{\wedge n}| & \cong & |S^1|^{\wedge n} & \cong & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} & \cong & \mathbb{R}^{n+} \end{array}$$

kommutiert (der Funktor $-^+$ ist symmetrisch monoidal).

Die Abbildung $|(-1)_{S^1} \wedge (S^1)^{\wedge n-1}|$ ergibt nach Konjugieren $\mathbb{R}^{n+} \xrightarrow{\text{diag}(-1,1,\dots,1)^+} \mathbb{R}^{n+}$, denn das folgende Diagramm kommutiert (wobei die Relationen zwischen den Einheiten und Coeinheiten ausgenutzt werden):

$$\begin{array}{ccccc} |S^1 \wedge (S^1)^{\wedge n-1}| & \xrightarrow{\cong} & |S^1| \wedge |S^1|^{\wedge n-1} & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n+} \\ \downarrow |\nu \wedge 1| & & \downarrow |\nu| \wedge 1 & & \parallel \\ |Sing(\mathbb{R}^+) \wedge (S^1)^{\wedge n-1}| & \xrightarrow{\cong} & |Sing(\mathbb{R}^+)| \wedge |S^1|^{\wedge n-1} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} \\ \downarrow |Sing((-1)_{\mathbb{R}}^+) \wedge 1| & & \downarrow |Sing((-1)_{\mathbb{R}}^+)| \wedge 1 & & \downarrow (-1)_{\mathbb{R}}^+ \wedge 1 \\ |Sing(\mathbb{R}^+) \wedge (S^1)^{\wedge n-1}| & \xrightarrow{\cong} & |Sing(\mathbb{R}^+)| \wedge |S^1|^{\wedge n-1} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} \\ \uparrow |\nu \wedge 1| & & \uparrow |\nu| \wedge 1 & & \parallel \\ |S^1 \wedge (S^1)^{\wedge n-1}| & \xrightarrow{\cong} & |S^1| \wedge |S^1|^{\wedge n-1} & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{R}^+)^{\wedge n} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{n+} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ ((-1)_{\mathbb{R}} \times 1_{\mathbb{R}^{n-1}})^+ \end{array}$$

Entsprechend ist $\mathbb{R}^{2+} \xrightarrow{\text{diag}(1,-1)^+} \mathbb{R}^{2+}$ das Konjugierte der Abbildung $|S^1 \wedge (-1)_{S^1}|$.

• 1. Sei $\tau \in \Sigma_n$ und $P_\tau \in GL_n(\mathbb{R})$ die zu τ gehörige Permutationsmatrix. Falls τ eine ungerade Permutation ist, so ist $\det P_\tau = -1 = \det \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Nach dem Lemma 2.59 sind dann die Abbildungen $\tau^+ : \mathbb{R}^{n+} \rightarrow \mathbb{R}^{n+}$ und $\text{diag}(-1, 1, \dots, 1)^+ : \mathbb{R}^{n+} \rightarrow \mathbb{R}^{n+}$ in $Ho(Top_*)$ gleich, und somit sind nach den letzten Bemerkungen die Abbildungen $\tau : (S^1)^{\wedge n} \rightarrow (S^1)^{\wedge n}$ und $(-1)_{S^1} \wedge (S^1)^{\wedge n-1}$ in $Ho(sSet_*)$ gleich. Falls andererseits τ eine gerade Permutation ist, so gilt $\det P_\tau = 1 = \det E_n$, wobei $E_n \in GL_n(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix ist. Entsprechend sind dann $\tau : (S^1)^{\wedge n} \rightarrow (S^1)^{\wedge n}$ und die Identität von $(S^1)^{\wedge n}$ in $Ho(sSet_*)$ gleich.

• 2. Da die beiden Diagonalmatrizen $\text{diag}(-1, 1)$ und $\text{diag}(1, -1)$ die gleiche Determinante haben, sind nach Lemma 2.59 die beiden Abbildungen $\mathbb{R}^{2+} \xrightarrow{\text{diag}(1,-1)^+} \mathbb{R}^{2+}$ und $\mathbb{R}^{2+} \xrightarrow{\text{diag}(-1,1)^+} \mathbb{R}^{2+}$ in $Ho(Top_*)$ gleich und somit auch $(-1)_{S^1} \wedge S^1$ und $S^1 \wedge (-1)_{S^1}$ in $Ho(sSet_*)$. \square

Im letzten Lemma wurde folgendes benutzt:

Lemma 2.59. • Die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ hat zwei Wegzusammenhangskomponenten, nämlich die Matrizen mit positiver Determinante und die Matrizen mit negativer Determinante.

• Seien $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ zwei Matrizen mit gleichem Vorzeichen der Determinante. Dann sind die beiden punktierten Abbildungen $\mathbb{R}^{n+} \xrightarrow{A^+, B^+} \mathbb{R}^{n+}$ zueinander homotop und damit in $Ho(Top_*)$ gleich.

Beweis. • Die erste Aussage folgt daraus, dass jede Matrix $A \in GL_n(\mathbb{R})$ Produkt von mehreren Elementarmatrizen und einer Diagonalmatrix $\text{diag}(\det A, 1, \dots, 1)$ ist. Elementarmatrizen liegen in der gleichen Wegzusammenhangskomponente wie die Identität. Außerdem hat \mathbb{R}^\times genau zwei Wegkomponenten und liegen alle Diagonalmatrizen der Form $\text{diag}(a, 1, \dots, 1)$ mit gleichem Vorzeichen der Determinante in der gleichen Komponente. Da auch die Multiplikation von Matrizen mit Wegzusammenhangskomponenten verträglich ist, folgt die Aussage.

• Nach Voraussetzung liegen A und B in der gleichen Wegzusammenhangskomponente. Es gibt also einen Weg $w : I \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ mit $w(0) = A, w(1) = B$. Wir wissen, dass die topologische Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n wirkt: $\mu : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\mathbb{R}^{n+} \wedge I^+ \cong (I \times \mathbb{R}^n)^+ \xrightarrow{1 \times w} (GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n)^+ \xrightarrow{\mu} (\mathbb{R}^n)^+$$

eine Homotopie zwischen den oben angegebenen Abbildungen (denn I ist schon kompakt und damit $I^+ = I_+ := I \sqcup \{*\}$). Die beiden Abbildungen sind in $Ho(Top_*)$ gleich, weil \mathbb{R}^n cofasernd und damit $\mathbb{R}^n \wedge I_+$ ein Zylinderobjekt ist. □

2.5.3 Das Vorzeichen $(-1)_{\mathbb{P}^1}$ der projektiven Gerade

Zunächst definieren wir die projektive Gerade:

Definition 2.60. • Die projektive Gerade über \mathbb{Z} ist das Schema $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 = Proj(\mathbb{Z}[T_0, T_1])$ und die projektive Geraden über S das S -Schema $\mathbb{P}_S^1 = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 \times S$.

Wir haben ein Pushout-Diagramm in Sm/S :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_{m,S} = D_+(T_0 T_1) \times S & \xrightarrow{i'_1} & \mathbb{A}_S^1 = D_+(T_1) \times S \\ \downarrow i'_0 & & \downarrow i_1 \\ \mathbb{A}_S^1 = D_+(T_0) \times S & \xrightarrow{i_0} & \mathbb{P}_S^1 \end{array}$$

das auch ein Nisnevich-Quadrat ist und somit in der Kategorie $sShv(S)$ (Def. 2.50) auch ein Pushout-Diagramm.

Der Basispunkt von $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ sei die abgeschlossene Immersion $Spec(\mathbb{Z}) \xrightarrow{0} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ und dessen Basiswechsel $S \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ der Basispunkt von \mathbb{P}_S^1 . Die letzte Abbildung induziert den abgeschlossen-flasque cofasernden Basispunkt von $h(\mathbb{P}_S^1)$: $\infty : * = h(S) \rightarrow h(\mathbb{P}_S^1)$. Also ist $(h(\mathbb{P}_S^1), \infty)$ ein abgeschlossen-flasque cofasernder punktierter motivischer Raum, der mit \mathbb{P}^1 bezeichnet wird.

- Der punktierte motivische Raum $(h(\mathbb{G}_{m,S}), 1)$, wobei 1 durch $Spec \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ induziert wird, wird mit \mathbb{G}_m bezeichnet.

Zunächst wird das Vorzeichen von \mathbb{P}^1 definiert.

Definition 2.61. • Der Automorphismus $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, der durch den graduierten Isomorphismus $\mathbb{Z}[T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{Z}[T_0, T_1]$, $T_0 \mapsto -T_0, T_1 \mapsto T_1$ induziert wird mit $(-1)_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$ bezeichnet.

- Entsprechend ist $(-1)_{\mathbb{P}_S^1} = (-1)_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1} \times S$ der durch Basiswechsel entstandenen Automorphismus in Sm/S .
- Nach Lemma 2.62 induziert $(-1)_{\mathbb{P}_S^1}$ einen Automorphismus $h((-1)_{\mathbb{P}_S^1})$ von \mathbb{P}^1 , der mit $(-1)_{\mathbb{P}^1}$ bezeichnet wird, und das Vorzeichen von \mathbb{P}^1 genannt wird.

Bemerkung Zum Vorzeichen der projektiven Gerade \mathbb{P}^1 und seiner Beziehung zur Zerlegung $\mathbb{P}^1 \cong S^1 \wedge \mathbb{G}_m$ siehe auch [Mo, 6.1 The element ϵ].

Lemma 2.62. Der Automorphismus $(-1)_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1}$ ist der durch das folgende Diagramm (auf dem Pushout) induzierte Morphismus:

$$\begin{array}{ccccc} D_+(T_0) & \longleftarrow & D_+(T_0 T_1) & \longrightarrow & D_+(T_1) \\ \downarrow \frac{T_1}{T_0} \mapsto -\frac{T_1}{T_0} & & \downarrow \frac{T_1}{T_0} \mapsto -\frac{T_1}{T_0} & & \downarrow \frac{T_0}{T_1} \mapsto -\frac{T_0}{T_1} \\ D_+(T_0) & \longleftarrow & D_+(T_0 T_1) & \longrightarrow & D_+(T_1) \end{array}$$

Entsprechend kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_S^1 \cup_{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{A}_S^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}_S^1 \\ \downarrow (-1) \cup_{(-1)} (-1) & & \downarrow (-1)_{\mathbb{P}_S^1} \\ \mathbb{A}_S^1 \cup_{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{A}_S^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}_S^1 \end{array}$$

wobei der Morphismus (-1) auf Koordinaten durch $T \mapsto -T$ gegeben ist. Damit respektiert $(-1)_{\mathbb{P}_S^1}$ auch den Basispunkt ∞ .

Beweis. Das Urbild der offenen Teilmenge $D_+(T_0)$ von $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ unter dem Automorphismus ist $D_+(-T_0) = D_+(T_0)$, das von $D_+(T_1)$ ist $D_+(T_1)$, und das von $D_+(T_0T_1)$ ist $D_+(-T_0T_1)$. Die Koordinaten werden entsprechend der Definition abgebildet: $\frac{T_0}{T_1} \mapsto \frac{-T_0}{T_1} = -\frac{T_0}{T_1}$ und $\frac{T_1}{T_0} \mapsto \frac{T_1}{-T_0} = -\frac{T_1}{T_0}$. Die zweite Aussage folgt aus der ersten. Die dritte Aussage folgt aus der ersten und daraus, dass $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]), T \mapsto -T$ den Punkt $T = 0$ auf sich abbildet. \square

Im Folgenden wird der motivische Raum $(\mathbb{P}^1)^{\wedge n}$ durch der Raum $h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^n - 0) \times S)$ schwach äquivalent ersetzt. Auf letzterem wird eine Wirkung des Gruppenschemas $GL_{n,S}$ definiert, die mit dem Vorzeichen von \mathbb{P}^1 in Verbindung gebracht wird.

- Lemma 2.63.** 1. Es gibt ein Zickzack von motivisch schwachen Äquivalenzen in $M.(S)$ zwischen den punktierten motivischen Räumen \mathbb{P}^1 (Def. 2.60) und $h(\mathbb{A}_S^1)/_{h(i'_0)}h(\mathbb{G}_{m,S})$.
2. Unter diesem Zickzack entspricht der punktierte Abbildung $h((-1)_{\mathbb{P}^1_S})$ die Abbildung $h((-1)_{\mathbb{A}_S^1})/_{h((-1)_{\mathbb{G}_{m,S}})}$, d.h. es gibt eine entsprechende Folge von kommutativen Quadraten in $M.(S)$.

Beweis. 1. Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} h(\mathbb{A}_S^1) & \xleftarrow{h(i'_0)} & h(\mathbb{G}_{m,S}) & \xrightarrow{h(i'_1)} & h(\mathbb{A}_S^1) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow \sim \\ h(\mathbb{A}_S^1) & \xleftarrow{h(i'_0)} & h(\mathbb{G}_{m,S}) & \longrightarrow & h(S) \end{array}$$

Die Abbildung $h(\mathbb{G}_{m,S}) \xrightarrow{h(i'_0)} h(\mathbb{A}_S^1)$ ist ein Monomorphismus und die vertikalen Abbildungen sind motivisch schwache Äquivalenzen. Da die motivisch injektive Modellstruktur links-eigentlich ist, ist die durch das Diagramm induzierte Abbildung $f : h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) \rightarrow h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} * = h(\mathbb{A}_S^1)/_{h(i'_0)}h(\mathbb{G}_{m,S})$ eine motivische schwache Äquivalenz. Dem motivischen Raum $h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1)$ wird der Basispunkt $h(S) \xrightarrow{h(0)} h(\mathbb{A}_S^1) \xrightarrow{\text{incl}_1} h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1)$ zugeordnet, wobei incl_1 die Inklusion des rechten Summandens ist. Die Abbildung f mit dieser Wahl ist auch punktiert, denn der Basispunkt von $h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} *$ ist die Inklusion von $*$.

Die induzierte Abbildung $h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) \xrightarrow{(h(i_0), h(i_1))} h(\mathbb{P}^1_S)$ ist eine motivische schwache Äquivalenz, denn nach Garbifizierung ist sie ein Isomorphismus ([Mo, Lemma 2.1.13]). Diese Abbildung ist auch punktiert, denn $(h(i_0), h(i_1)) \cdot \text{incl}_1 \cdot h(0) = h(i_1) \cdot h(0)$.

2. Es kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} * \\ \downarrow h((-1)_{\mathbb{A}_S^1}) \amalg_{h((-1)_{\mathbb{G}_{m,S}})} h((-1)_{\mathbb{A}_S^1}) & & \downarrow h((-1)_{\mathbb{A}_S^1}) \amalg_{h((-1)_{\mathbb{G}_{m,S}})} 1^* \\ h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} * \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) & \longrightarrow & h(\mathbb{P}^1_S) \\ \downarrow h((-1)_{\mathbb{A}_S^1}) \amalg_{h((-1)_{\mathbb{G}_{m,S}})} h((-1)_{\mathbb{A}_S^1}) & & \downarrow h((-1)_{\mathbb{P}^1_S}) \\ h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h(\mathbb{G}_{m,S})} h(\mathbb{A}_S^1) & \longrightarrow & h(\mathbb{P}^1_S) \end{array}$$

nach Lemma 2.62. \square

Lemma-Definition 2.64. 1. Sei $GL_n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[A_{i,j}; i, j = 1, \dots, n]_{\det A})$ das Schema, dessen R -Punkte die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(R)$ ist, das somit ein Gruppenschema ist. Es operiert auf dem Schema $\mathbb{A}^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n])$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation: $\mu : GL_n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n, \phi : T_i \mapsto \sum_{j=1}^n A_{i,j} T_j$. Das offene Unterschema $\bigcup_{i=1}^n D(T_i)$ von \mathbb{A}^n werde mit $\mathbb{A}^n - 0$ bezeichnet. Es ist das Komplement des Abschlusses des Punktes (T_1, \dots, T_n) . Der entscheidende Punkt ist nun, dass auch die offene

Teilmenge $GL_n \times (\mathbb{A}^n - 0)$ von $GL_n \times \mathbb{A}^n$ durch μ auf $\mathbb{A}^n - 0$ abgebildet wird:

Somit gibt es einen Schema-Morphismus $\mu' : GL_n \times (\mathbb{A}^n - 0) \rightarrow \mathbb{A}^n - 0$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} GL_n \times (\mathbb{A}^n - 0) & \xrightarrow{\mu'} & \mathbb{A}^n - 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ GL_n \times \mathbb{A}^n & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{A}^n \end{array}$$

kommutiert. Weil $\mathbb{A}^n - 0 \rightarrow \mathbb{A}^n$ ein Monomorphismus ist, ist μ' auch eine Gruppenoperation von Schemata.

2. Einer Matrix $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ entspricht eine Abbildung $\underline{A} : \text{Spec}(\mathbb{Z}) \rightarrow GL_n$, die wiederum eine Abbildung induziert $\mathbb{A}^n \cong \text{Spec}(\mathbb{Z}) \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{A \times 1} GL_n \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{A}^n$, welche auch mit A bezeichnet wird. Diese faktorisiert (wie oben gesehen) über die Inklusion des offenen Unterschemas $\mathbb{A}^n - 0 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$.

3. Nach Basiswechsel mit $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ erhalten wir die oben definierten Begriffe auch für S -Schema, d.h. es gibt Gruppenwirkungen $\mu : GL_{n,S} \times_S \mathbb{A}_S^n \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ (und entsprechend auch eine für das offene Unterschema $(\mathbb{A}^n - 0) \times S$) und Gruppenhomomorphismen

$$GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Sch}_S}(\mathbb{A}_S^n) \text{ sowie } GL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Aut}_{M.(S)}(h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)).$$

Zusätzlich haben wir eine Abbildung

$h.(GL_{n,S}) \wedge [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)] \rightarrow [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)]$ (die sich unmittelbar nach Definition des Smash-Produkts aus dem obigen Diagramm ergibt) sodass wenn $\underline{A} : S \rightarrow GL_{n,S}$ der zu A gehörige S -Morphismus ist, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)] & & \\ \downarrow \cong & \searrow A & \\ h.(S) \wedge [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)] & & \\ \downarrow h.(\underline{A}) \wedge 1 & & \\ h.(GL_{n,S}) \wedge [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)] & \longrightarrow & [h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)] \end{array}$$

kommutiert.

4. Die Komposition dieser Abbildungen mit dem Gruppenhomomorphismus $\Sigma_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ (die jeder Permutation τ die zugehörige Permutationsmatrix P_τ zuordnet) induziert die oben benutzten Σ_n -Wirkung auf \mathbb{A}_S^n und auf $h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}^n - 0) \times S)$.

Beweis zu 1. Betrachten wir dazu ein Primideal $p \in \text{Spec}(\mathbb{Z}[A_{i,j}, T_k; i, j, k = 1, \dots, n]_{\det A})$, dessen Bild $\phi^{-1}(p)$ unter μ im Abschluss von (T_1, \dots, T_n) liegt, d.h. $(T_1, \dots, T_n) \subseteq \phi^{-1}(p)$. Somit $v_i := \sum_{j=1}^n A_{i,j} T_j \in p$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir können nun den Vektor v mit der Matrix $(\det A)^{-1} \text{adj}(A)$ multiplizieren (wobei $\text{adj}(A)$ die adjungierte Matrix zu A ist, deren Einträge also Polynome in Variablen $A_{i,j}$ sind) und erhalten dann einen Vektor, dessen Komponenten wieder in p liegen und nach der Cramerschen Regel genau T_1, \dots, T_n sind. Damit kann p nicht in dem offenen Unterschema $GL_n \times (\mathbb{A}^n - 0) = \cup_{i=1}^n GL_n \times D(T_i)$ liegen, denn sonst gäbe es ein T_i , das nicht in p läge. \square

Lemma 2.65. 1. Es gibt eine Σ_n -äquivariante Abbildung in $M.(S)$

$$[h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S})]^{\wedge n} \rightarrow h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}_S^n - 0) \times S)$$

die eine motivisch schwache Äquivalenz ist.

2. Das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S}) \wedge [h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S})]^{\wedge n-1} & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}_S^n - 0) \times S) \\ \downarrow (-1)_{h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S})} \wedge 1 & & \downarrow \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \\ h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S}) \wedge [h(\mathbb{A}_S^1)/h(\mathbb{G}_{m,S})]^{\wedge n-1} & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}_S^n - 0) \times S) \end{array}$$

Entsprechendes gilt auch für $\text{diag}(1, \dots, 1, -1)$.

Beweis. 1. Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i=0}^{n-1} h(\mathbb{A}_S^1)^{\times i} \times h(\mathbb{G}_m S) \times h(\mathbb{A}_S^1)^{\times n-(i+1)} & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^1)^{\times n} \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\coprod_{i=0}^{n-1} h(\mathbb{A}_S^{1 \times S^i} \times_S \mathbb{G}_m S \times_S \mathbb{A}_S^{1 \times S^{n-(i+1)}}) & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^{1 \times S^n}) \\
\downarrow & & \downarrow \cong \\
h((\mathbb{A}^n - 0) \times S) & \longrightarrow & h(\mathbb{A}_S^n)
\end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen Σ_n -äquivariant sind. Diese (horizontalen) Abbildungen induzieren auf den Quotienten die gewünschte Abbildung, die hier kurz f genannt wird. Um zu sehen, dass diese Abbildung eine motivische schwache Äquivalenz ist, reicht es wegen [Ja1, Lemma 2.6] zu zeigen, dass ihre Garbifizierung ein Isomorphismus ist. Wegen der Adjunktion (Lemma 2.51) $a : M.(S) \rightleftarrows sShv.(S) : i$ genügt es dafür zu zeigen, dass für alle $\mathcal{F} \in sShv.(S)$ die induzierte Abbildung $M.(S)(f, i(\mathcal{F}))$ eine Bijektion ist. Die Familie von offenen Immersionen $\{\mathbb{A}_S^{1 \times S^i} \times_S \mathbb{G}_m S \times_S \mathbb{A}_S^{1 \times S^{n-(i+1)}} \hookrightarrow (\mathbb{A}^n - 0) \times S; 0 \leq i \leq n-1\}$ ist eine Zariski-Überdeckung und deshalb auch eine Nisnevich-Überdeckung. Damit gilt, dass die mittlere vertikale Abbildung im folgenden Diagramm injektiv ist:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}(\mathbb{A}_S^n) & \longrightarrow & \mathcal{F}((\mathbb{A}^n - 0) \times S) & \longleftarrow & \mathcal{F}(S) \\
\downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
\mathcal{F}(\mathbb{A}_S^{1 \times S^n}) & \longrightarrow & \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}(\mathbb{A}_S^{1 \times S^i} \times_S \mathbb{G}_m S \times_S \mathbb{A}_S^{1 \times S^{n-(i+1)}}) & \longleftarrow & \mathcal{F}(S)
\end{array}$$

Somit ist die durch dieses Diagramm auf Pullbacks induzierte Abbildung bijektiv und diese ist isomorph zu $M.(S)(f, i(\mathcal{F}))$.

2. Das gesamte erste Diagramm ist mit den entsprechenden Abbildungen für $diag(-1, 1, \dots, 1)$ verträglich. Für die untere linke Abbildung kann dies nach Anwenden des Monomorphismus $h((\mathbb{A}^n - 0) \times S) \hookrightarrow h(\mathbb{A}_S^n)$ gesehen werden und für den Rest ist dies klar. \square

Mit Hilfe des Vorherigen und des folgenden Lemmas, das in etwa die motivische Variante des Lemmas 2.59 ist, wird schließlich die Hauptaussage dieses Abschnittes bewiesen.

Proposition 2.66. *Der Automorphismus $(-1)_{\mathbb{P}_S^1}$ ist ein Vorzeichen von \mathbb{P}_S^1 in $M^{cm}(S)$.*

Beweis. Nach Definition hat der Automorphismus die Ordnung 2. Da das Smash-Produkt zweier motivischer schwacher Äquivalenzen in $M.(S)$ eine motivische schwache Äquivalenz ist, und wegen Lemma 2.63 und 2.65, folgen die Eigenschaften in Def. 2.56 aus den folgenden beiden Punkten.

1. Sei $\tau \in \Sigma_n$ eine Permutation. Die beiden Automorphismen von $h(\mathbb{A}_S^n)/h((\mathbb{A}_S^n - 0) \times S)$
 - τ und
 - $diag(-1, 1, \dots, 1)$, falls τ eine ungerade Permutation ist, sonst die Identität,
sind in $Ho(M^{cm}(S))$ gleich.
2. Die beiden Automorphismen $diag(-1, 1)$ und $diag(1, -1)$ von $h(\mathbb{A}_S^2)/h((\mathbb{A}_S^2 - 0) \times S)$ sind in $Ho(M^{cm}(S))$ gleich.

Nach Lemma 2.67-2. folgt dies aus folgenden beiden Punkten.

1. $\det P_\tau = \begin{cases} \det diag(-1, 1, \dots, 1) & \tau \text{ ist ungerade} \\ \det diag(1, \dots, 1) & \tau \text{ ist gerade} \end{cases}$
2. $\det diag(-1, 1) = \det diag(1, -1)$

□

Lemma 2.67. Seien $A_0, A_1 \in GL_n(\mathbb{Z})$ zwei Matrizen, sodass $A_1 A_0^{-1} \in SL_n(\mathbb{Z})$. Die beiden Matrizen induzieren via der Inklusion $GL_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow GL_n(\mathcal{O}_S(S)) \cong \text{Sch}_S(S, GL_{n,S})$ zwei Morphismen $\underline{A}_0, \underline{A}_1 : S \rightarrow GL_{n,S}$ in Sm/S .

1. Dann gibt es eine Abbildung $f : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow GL_{n,S}$ in Sm/S , sodass $f \cdot i_l = \underline{A}_l$ gilt, wobei $i_l : S \rightarrow \mathbb{A}_S^1$ die beiden Morphismen sind, die von 0 und 1 in $\mathcal{O}_S(S)$ repräsentiert werden:

$$\begin{array}{ccc} S \amalg S & \xrightarrow{(\underline{A}_0, \underline{A}_1)} & GL_{n,S} \\ \downarrow (i_0, i_1) & \nearrow f & \\ \mathbb{A}_S^1 & & \end{array}$$

2. Sei E ein punktierter motivischer Raum und $\mu : h.(GL_{n,S}) \wedge E \rightarrow E$ eine Abbildung in $M.(S)$. Die beiden Endomorphismen von E , die durch die Morphismen \underline{A}_0 und \underline{A}_1 induziert werden, sind in $Ho(M^{cm}(S))$ gleich.

Beweis. 1. Einer Abbildung $f : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow GL_{n,S}$ in Sm/S entspricht (unter der Adjunktion von Ringen und Schemata $(\Gamma, Spec)$) genau eine Matrix $\tilde{A} \in GL_n(\mathcal{O}_S(S)[T])$. Da die Abbildung i_l auf globalen Schnitten durch $\mathcal{O}_S(S)[T] \rightarrow \mathcal{O}_S(S), T \mapsto l$ gegeben ist, bedeutet die Bedingung, dass f ein Lift ist, für die Matrix \tilde{A} , dass $\tilde{A}(l) = A_l, l = 0, 1$ gilt, wobei $\tilde{A}(l)$ das Bild von \tilde{A} unter dem Gruppenhomomorphismus $GL_n(\mathcal{O}_S(S)[T]) \rightarrow GL_n(\mathcal{O}_S(S)), T \mapsto l$ ist.

Wir können annehmen, dass $A_0 = E$ die Einheitsmatrix ist und $A_1 \in SL_n(\mathbb{Z})$, denn: falls es für das Paar $(E, A_1 \cdot A_0^{-1})$ einen Lift $\tilde{A} \in GL_n(\mathcal{O}_S(S)[T])$ gibt, so ist $\tilde{A} \cdot A_0 \in GL_n(\mathcal{O}_S(S)[T])$ ein Lift für (A_0, A_1) (wobei A_0 bzgl. T als konstant angesehen wird).

Weiterhin können wir annehmen, dass A_1 eine Elementarmatrix ist, denn die Projektionen $T \mapsto l$ sind multiplikativ, und jede Matrix $A_1 \in SL_n(\mathbb{Z})$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen. Nämlich falls \tilde{A} ein Lift von (A_0, A_1) ist und \tilde{B} ein Lift von (B_0, B_1) ist, so ist $\tilde{A}\tilde{B}$ ein Lift von $(A_0 B_0, A_1 B_1)$.

Falls nun $A_0 = E$ und $A_1 = E_{k,l}(a)$ eine Elementarmatrix mit $a \in \mathbb{Z}$ ist, wähle $\tilde{A} := E_{k,l}(aT) \in GL_n(\mathcal{O}_S(S)[T])$ als Lift.

2. Sei $pr : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow S$ die Projektion. Dann gilt $h.(pr) \cdot h.(i_l) = h.(pr \cdot i_l) = h.(1_S) = 1_{h.(S)}, l = 0, 1$. Da $h.(pr)$ eine motivisch schwache Äquivalenz ist, ist es ein Isomorphismus in $Ho(M^{cm}(S))$. Damit werden $h.(i_0)$ und $h.(i_1)$ in der Homotopiekategorie identifiziert. Nach Proposition 2.53 werden dann auch die Abbildungen $h.(i_l) \wedge E, l = 0, 1$ in der Homotopiekategorie identifiziert. Mit $\underline{A}_l = f \cdot i_l$ folgt die Behauptung.

□

3 Allgemeines über Spektren und symmetrische Spektren

In diesem Kapitel definieren wir *symmetrische Spektren* und *Ringspektren* und deren Lokalisierung für eine symmetrisch monoidale Kategorie $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ und ein Objekt T in \mathcal{D} .

Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine punktierte abgeschlossene symmetrisch monoidale Kategorie mit internem Hom-Objekt Hom . Also hat für jedes Objekt X von \mathcal{D} zu der Funktor $- \wedge X$ einen rechtsadjungierten Funktor $Hom(X, -)$. Die zur Identität von $Hom(X, Y)$ adjungierte Abbildung $Hom(X, Y) \wedge X \rightarrow Y$ wird mit ev bezeichnet. Punktiert zu sein bedeutet, dass es ein Null-Objekt $*$ gibt.

Sei T ein Objekt von \mathcal{D} . Wir erhalten einen Endofunktor $\Omega = Hom(T, -)$. Die Bezeichnung für den Symmetrie-Isomorphismus von \mathcal{D} sei $t_{E,F} : E \wedge F \rightarrow F \wedge E$. Mit $l_X : S^0 \wedge X \rightarrow X$ und $\rho_X : X \wedge S^0 \rightarrow X$ werden der linke bzw. rechte Einheitsisomorphismus bezeichnet.

3.1 Definitionen

Die symmetrische Gruppe wird zur Definition von symmetrischen Spektren benötigt:

Definition 3.1. • Sei Σ_n die Automorphismengruppe der Menge $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$.

- Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ haben wir Gruppenhomomorphismen $\Sigma_n \times \Sigma_m \rightarrow \Sigma_{n+m}, (\tau_1, \tau_2) \mapsto \tau_1 + \tau_2 = \tau_1 \times \tau_2$, wobei $\tau_1 + \tau_2$ durch die Formel:

$$[\tau_1 + \tau_2](i) = \begin{cases} \tau_1(i), & 1 \leq i \leq n \\ \tau_2(i - m), & n + 1 \leq i \leq n + m \end{cases}$$

definiert ist. Entsprechend ist $n + \tau_2 := 1_n + \tau_2$.

- Das Element $\chi_{m,n} \in \Sigma_{m+n}$ sei die Vertauschung der ersten m Elemente mit den letzten n :

$$\chi_{m,n}(i) = \begin{cases} n + i, & 1 \leq i \leq m \\ i - m, & m + 1 \leq i \leq m + n \end{cases}$$

- Eine Elementarpermutation $\tau_{m,p} \in \Sigma_n$ ist die Abbildung:

$$\tau_{m,p}(i) = \begin{cases} p, & i = m \\ m, & i = p \\ i, & i \neq m, p \end{cases}$$

Definition 3.2. Sei $T^n = T^{\wedge n}$ für $n \geq 1$ und $T^0 = S^0$. Die symmetrische Gruppe Σ_n operiert auf T^n durch Permutation. Dabei wirkt die Elementarpermutation $\tau_{i,i+1}$ als $T^{i-1} \wedge t_{T,T} \wedge T^{n-i-1}$.

Wir müssen später zwei Funktoren vergleichen:

Lemma-Definition 3.3. 1. Wir definieren Auswertungsabbildungen $ev_X^n : \Omega^n X \wedge T^n \rightarrow X$ induktiv durch $ev_X^1 = ev$ und $ev_X^n = ev \cdot (ev_{\Omega X}^{n-1} \wedge T)$. Die zu ev_X^n adjungierte Abbildung $\delta_{n,X} : \Omega^n X \rightarrow Hom(T^n, X)$ ist dann ein natürlicher Isomorphismus.

Mittels diesem definieren wir für jedes Element $\tau \in \Sigma_n$ eine natürliche Transformation $\Omega^\tau : \Omega^n \rightarrow \Omega^n$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n & \xrightarrow[\cong]{\delta_{n,X}} & Hom(T^n, -) \\ \downarrow \Omega^\tau & & \downarrow Hom(\tau^{-1}, -) \\ \Omega^n & \xrightarrow[\cong]{\delta_{n,X}} & Hom(T^n, -) \end{array}$$

2. Falls $(\tau_1, \tau_2) \in \Sigma_n \times \Sigma_m$ ($n, m \in \mathbb{N}_0$) ist, so gilt: $\Omega_X^{\tau_1 + \tau_2} = \Omega_{\Omega^m X}^{\tau_1} \cdot \Omega_X^{\tau_2}$

Beweis. 1. Wir haben in A und X natürliche Bijektionen:

$$\mathcal{D}(A, \Omega^n X) \cong \mathcal{D}(A \wedge T, \Omega^{n-1} X) \cong \dots \cong \mathcal{D}(A \wedge T^n, X) \cong \mathcal{D}(A, Hom(T^n, X))$$

und das Bild der Identität von $\Omega^n X$ wird auf die Abbildung $\Omega^n X \rightarrow Hom(T^n, X)$ geschickt (denn die Identität von $\Omega^n X$ ist die Identität von $\Omega^{n-1} \Omega X$).

2. Für die Komposition $f := \delta_{n+m,X} \cdot \delta_{n,\Omega^m X}^{-1} \cdot Hom(T^n, \delta_{m,X}^{-1}) : Hom(T^n, Hom(T^m, X)) \rightarrow Hom(T^{n+m}, X)$ kann $\mathcal{D}(A, f)$ mit dem folgendem kommutativen Diagramm bestimmt werden:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D}(A, \delta_{n+m,X}) & & \\ & & \xrightarrow{\cong} & & \\ \mathcal{D}(A, \Omega^{n+m} X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}(A \wedge T^{n+m}, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}(A, Hom(T^{n+m}, X)) \\ \downarrow \cong & & \parallel & & \downarrow \mathcal{D}(A, f) \\ \mathcal{D}(A \wedge T^n, \Omega^m X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}((A \wedge T^n) \wedge T^m, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}(A \wedge T^n, Hom(T^m, X)) \\ \downarrow \cong & & \mathcal{D}(A \wedge T^n, \delta_{m,X}) & & \uparrow \cong \\ \mathcal{D}(A, Hom(T^n, \Omega^m X)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{D}(A, Hom(T^n, Hom(T^m, X))) & & \end{array}$$

Damit ist f verträglich mit den Abbildungen $\tau_1^{-1} : T^n \rightarrow T^n$ und $\tau_2^{-1} : T^m \rightarrow T^m$. Somit ist auch wegen Natürlichkeit $\delta_{n+m,X} \cdot \delta_{n,\Omega^m X}^{-1}$ mit τ_1^{-1} verträglich und ebenso wegen $f = \delta_{n+m,X} \cdot \Omega^n \delta_{m,X}^{-1} \cdot \delta_{n, Hom(T^m, X)}^{-1}$ die Abbildung $\delta_{n+m,X} \cdot \Omega^n \delta_{m,X}^{-1}$ mit τ_2^{-1} verträglich. Aus der ersten Verträglichkeit ergibt sich $\Omega_X^{\tau_1 + m} = \Omega_{\Omega^m X}^{\tau_1}$ und aus der zweite $\Omega_X^{\tau_1 + m} = \Omega^n \Omega_X^{\tau_2}$. Zusammen folgt die Aussage. \square

Definition 3.4 ([Sch09, Ch. I, Definition 1.1]). Ein symmetrisches T -Spektrum X in \mathcal{D} besteht aus:

- einer Folge von Objekten $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ in \mathcal{D} mit einer Linkswirkung der symmetrischen Gruppe Σ_n auf X_n und
- einer Folge von Abbildungen $\sigma_n^X : X_n \wedge T \rightarrow X_{n+1}$, die Strukturabbildungen genannt werden,
- so dass die Abbildungen: $\sigma_n^m X : X_n \wedge T^m \rightarrow X_{n+m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ $\Sigma_n \times \Sigma_m$ -äquivariant sind,

wobei $\sigma_n^m X$ induktiv durch $\sigma_n^1 X := \sigma_n^X$ und $\sigma_n^{m+1} X = \sigma_{n+m}^X \cdot (\sigma_n^m X \wedge T)$ definiert sind.

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von symmetrischen T -Spektrern in \mathcal{D} ist eine Folge Abbildungen $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ in \mathcal{D} mit den Eigenschaften, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

- die Abbildung f_n Σ_n -äquivariant ist und
- die Abbildungen mit den Strukturabbildungen verträglich sind: $\sigma_n^Y \cdot (f_n \wedge T) = f_{n+1} \cdot \sigma_n^X$.

Zusammen bilden die symmetrischen T -Spektrern in \mathcal{D} und ihre Abbildungen die Kategorie $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ der symmetrischen T -Spektrern auf \mathcal{D} . Ganz entsprechend definiert man die Kategorie $Sp(\mathcal{D}, T)$ der T -Spektrern, in dem man in obiger Definition die Wirkung der symmetrischen Gruppen weglässt. Somit gibt es einen Vergissfunktorkomplex U von der Kategorie der symmetrischen T -Spektrern in die Kategorie der T -Spektrern, der der Rechtsadjungierte einer Adjunktion ist ([Ja2, S. 507]).

Beispiel Sei L ein Objekt von \mathcal{D} . Die Folge $(L \wedge T^n, n \in \mathbb{N}_0)$ zusammen mit den Identitäten $(L \wedge T^n) \wedge T^m = L \wedge T^{n+m}$ ist ein symmetrisches Spektrum in \mathcal{D} . Es heißt Einhängungsspektrum von L und wird mit $\Sigma^\infty L$ bezeichnet.

Bemerkung Beide Kategorien $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T), Sp(\mathcal{D}, T)$ sind bivollständig, falls \mathcal{D} bivollständig ist [Hov2, Lemma 1.3].

Lemma-Definition 3.5. Die Adjungierten der Strukturabbildungen $\sigma_n^X : X_n \wedge T \rightarrow X_{n+1}$ werden mit $\tilde{\sigma}_n^X : X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$ bezeichnet. Die Bedingung, $\sigma_n^Y \cdot (f_n \wedge T) = f_{n+1} \cdot \sigma_n^X$, an eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von Spektrern ist dann per Adjunktion äquivalent zu: $\tilde{\sigma}_n^Y \cdot f_n = \Omega f_{n+1} \cdot \tilde{\sigma}_n^X$.

Beweis. $ev \cdot [(\tilde{\sigma}_n^Y \cdot f_n) \wedge T] = \sigma_n^Y \cdot (f_n \wedge T) = f_{n+1} \cdot \sigma_n^X = f_{n+1} \cdot ev \cdot [\tilde{\sigma}_n^X \wedge T] = ev \cdot [(\Omega f_{n+1} \cdot \tilde{\sigma}_n^X) \wedge T]$ \square

Als nächstes definieren wir den Shift-Funktorkomplex sh , den $L \wedge$ -Smash-Funktorkomplex und dessen Adjungierten $Hom(L, -)$.

Definition 3.6. Sei L ein Objekt von \mathcal{D} .

- Der Endofunktorkomplex sh von $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ist wie folgt definiert: objektweise sei $(shX)_n = X_{1+n}$ mit Σ_n -Wirkung induziert durch Verkettung mit der Inklusion $1 + - : \Sigma_n \hookrightarrow \Sigma_{1+n}$ und mit Strukturabbildungen σ_{1+n}^X . Für Morphismen wird er entsprechend definiert.
- Der Endofunktorkomplex $L \wedge -$ von $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ist objektweise durch $(L \wedge X)_n = L \wedge X_n$ mit der induzierten Σ_n -Wirkung definiert und hat die Strukturabbildungen $L \wedge X_n \wedge T \xrightarrow{L \wedge \sigma_n^X} L \wedge X_{n+1}$.
- Der Endofunktorkomplex $- \wedge L$ von $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ist objektweise $(X \wedge L)_n = X_n \wedge L$ mit induzierter Σ_n -Wirkung und hat die Strukturabbildungen $X_n \wedge L \wedge T \xrightarrow{X_n \wedge t_{L,T}} X_n \wedge T \wedge L \xrightarrow{\sigma_n^X \wedge L} X_{n+1} \wedge L$. Damit sind $X \wedge L$ und $L \wedge X$ isomorph.
- Dieser Funktorkomplex hat einen Rechtsadjungierten $Hom(L, -)$ (siehe Lemma 3.7). Levelweise ist $Hom(L, X)$ durch $Hom(L, X)_n = Hom(L, X_n)$ mit der induzierten Σ_n -Wirkung definiert. Dessen Strukturabbildungen $\sigma_n^{Hom(L, X)} : Hom(L, X_n) \wedge T \rightarrow Hom(L, X_{n+1})$ sind adjungiert zur Komposition $Hom(L, X_n) \wedge T \wedge L \xrightarrow{1 \wedge t_{T,L}} Hom(L, X_n) \wedge L \wedge T \xrightarrow{ev \wedge 1} X_n \wedge T \xrightarrow{\sigma_n^X} X_{n+1}$.
- Entsprechend setzt sich Ω von \mathcal{D} auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ fort: $\Omega = Hom(T, -)$.

Lemma 3.7. Sei L ein Objekt von \mathcal{D} . Wir haben eine Adjunktion:

$$- \wedge L : Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T) \rightleftarrows Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T) : Hom(L, -).$$

Beweis. Eine Abbildung $f : X \wedge L \rightarrow Y$ entspricht einer Folge von Abbildungen $f_n : X_n \wedge L \rightarrow Y_n, n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\sigma_n^Y \cdot (f_n \wedge T) = f_{n+1} \cdot \sigma_n^{L \wedge T}$ gilt. Per Adjunktion entsprechen diesen die Abbildungen: $\widehat{f}_n : X_n \rightarrow \text{Hom}(L, Y_n)$ mit $f_n = \text{ev} \cdot (\widehat{f}_n \wedge L)$, so dass $\widehat{f}_{n+1} \cdot \sigma_n^X = \sigma_n^{\text{Hom}(L, Y)} \cdot (\widehat{f}_n \wedge T)$, denn dies ist äquivalent zu: $f_{n+1} \cdot \sigma_n^{X \wedge L} = \text{ev} \cdot [(\widehat{f}_{n+1} \cdot \sigma_n^X) \wedge L] \cdot (X_n \wedge t_{L, T}) = \text{ev} \cdot [(\sigma_n^{\text{Hom}(L, Y)} \cdot (\widehat{f}_n \wedge T)) \wedge L] \cdot (X_n \wedge t_{L, T}) = [\sigma_n^Y \cdot (\text{ev} \wedge T) \cdot (\text{Hom}(L, Y_n) \wedge t_{L, L})] \cdot [(\text{Hom}(L, Y_n) \wedge t_{L, T}) \cdot (\widehat{f}_n \wedge L \wedge T)] = \sigma_n^Y \cdot [(\text{ev} \cdot (\widehat{f}_n \wedge L)) \wedge T] = \sigma_n^Y \cdot (f_n \wedge T)$. Letztere entsprechen einer Abbildung $\widehat{f} : X \rightarrow \text{Hom}(L, Y)$. \square

Die nächste Definition ist im Zusammenhang mit der Semistabilität sehr wichtig.

Definition 3.8. (i) Es gibt einen natürlichen Morphismus $\lambda_X : X \wedge T \rightarrow \text{sh}X$ von symmetrischen T -Spektren. Er ist levelweise definiert als: $X_n \wedge T \xrightarrow{\sigma_n^X} X_{n+1} \xrightarrow{\chi_{n,1}} X_{1+n}$. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_n \wedge T \wedge T & \xrightarrow{\sigma_n^X \wedge T} & X_{n+1} \wedge T & \xrightarrow{\chi_{n,1} \wedge T} & X_{1+n} \wedge T \\ \downarrow X_n \wedge t_{T, T} & \searrow \sigma_n^{2X} & \downarrow \sigma_{n+1}^X & & \downarrow \sigma_{1+n}^X \\ X_n \wedge T \wedge T & & X_{n+1+1} & & \\ \downarrow \sigma_n^X \wedge T & \searrow \sigma_n^{2X} & \downarrow n + \chi_{1,1} & \searrow \chi_{n,1+1} & \\ X_{n+1} \wedge T & \xrightarrow{\sigma_{n+1}^X} & X_{n+1+1} & \xrightarrow{\chi_{n+1,1}} & X_{1+n+1} \end{array}$$

kommutiert, ist dies auch eine Abbildung von Spektren. Wegen der Isomorphie $T \wedge X \cong X \wedge T$ gibt es auch einen Morphismus $T \wedge X \rightarrow \text{sh}X$, der ebenso mit λ_X bezeichnet wird.

(ii) Per Adjunktion (siehe Lemma 3.7) ergibt sich hieraus die Abbildung $\tilde{\lambda}_X : X \rightarrow \text{RX}$ in $\text{Sp}^\Sigma(\mathcal{D}, T)$, wobei $R = \Omega \text{sh}$ die Komposition ist. Levelweise ist sie $X_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}^X} \Omega X_{n+1} \xrightarrow{\Omega \chi_{n,1}} \Omega X_{1+n}$.

(iii) Diese Abbildungen $\tilde{\lambda}_X$ ergeben ein sequentielles Diagramm:

$$X \xrightarrow{\tilde{\lambda}_X} \text{RX} \xrightarrow{R\tilde{\lambda}_X} R^2 X \xrightarrow{R^2 \tilde{\lambda}_X} \dots$$

dessen Colimes mit $R^\infty X$ bezeichnet wird. Die Inklusion $X \rightarrow R^\infty X$ wird λ_X^∞ genannt. Dann ist R^∞ ein Endofunktor von $\text{Sp}^\Sigma(\mathcal{D}, T)$.

Für T -Spektren werden wir folgende Begriffe benutzen.

Definition 3.9. (i) Der Endofunktor s von $\text{Sp}(\mathcal{D}, T)$ ist wie folgt definiert: objektweise sei $(s X)_n = X_{n+1}$ mit Strukturabbildungen σ_{n+1}^X . Für Morphismen wird er entsprechend definiert.

(ii) Für Spektren $\text{Sp}(\mathcal{D}, T)$ wird der Endofunktor Ω levelweise als $(\Omega X)_n = \Omega X_n$ definiert. Er hat $\Omega \tilde{\sigma}$ als Strukturabbildungen.

(iii) Die Abbildung $\iota : 1 \rightarrow \Theta = \Omega s$ von Endofunktoren von $\text{Sp}(\mathcal{D}, T)$ ist levelweise: $X_n \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \Omega X_{n+1}$. Sie ist offensichtlich eine Abbildung von Spektren.

(iv) Sei nun $\Theta^\infty = \text{colim}(1 \xrightarrow{\iota} \Theta \xrightarrow{\Theta \iota} \Theta^2 \xrightarrow{\Theta^2 \iota} \dots)$ mit Inklusionsabbildung $j^\infty : 1 \rightarrow \Theta^\infty$. Gelegentlich wird auch die Bezeichnung Q^∞ für Θ^∞ benutzt. Der Ausdruck $\Theta^\infty X$, in dem X ein symmetrisches Spektrum ist, ist als $\Theta^\infty(UX)$ zu verstehen.

3.2 Ringspektren und ihre Lokalisierungen

Definition 3.10 ([Sch09, Ch. I, Definition 1.3.]). Ein symmetrisches (T -)Ringspektrum R in \mathcal{D} besteht aus den folgenden Daten:

- einer Folge R_n von Objekten in \mathcal{D} für $n \geq 0$,
- einer Wirkung der Gruppe Σ_n auf R_n ,
- $\Sigma_n \times \Sigma_m$ -äquivarianten Multiplikationsabbildungen: $\mu_{n,m} : R_n \wedge R_m \rightarrow R_{n+m}$ für alle $n, m \geq 0$ in \mathcal{D} , und
- zwei Einheitsabbildungen $\iota_0 : S^0 \rightarrow R_0$ und $\iota_1 : T \rightarrow R_1$ in \mathcal{D} ,

welche den folgenden Bedingungen genügen müssen:

- (Assoziativität) $\mu_{n+m,p} \cdot (\mu_{n,m} \wedge R_p) = \mu_{n,m+p} \cdot (R_n \wedge \mu_{m,p})$, für alle $n, m, p \geq 0$,
- (Einheit) $\mu_{n,0} \cdot (R_n \wedge \iota_0) = (R_n \wedge S^0 \xrightarrow{\rho_{R_n}} R_n)$ und $\mu_{0,n} \cdot (\iota_0 \wedge R_n) = (S^0 \wedge R_n \xrightarrow{\iota_{R_n}} R_n)$, und
- (Zentralität) $\chi_{n,1} \cdot \mu_{n,1} \cdot (R_n \wedge \iota_1) = \mu_{1,n} \cdot (\iota_1 \wedge R_n) \cdot t_{R_n,T}$.

Eine Abbildung von symmetrischen Ringspektren $R \xrightarrow{f} S$ ist eine Folge von Abbildungen $R_n \xrightarrow{f_n} S_n, n \geq 0$, so dass f_n Σ_n -äquivariant ist, und diese Abbildungen mit Einheits- und Multiplikationsabbildungen verträglich sind: $f_i \cdot \iota_i^R = \iota_i^S, i = 0, 1$ sowie $f_{n+m} \cdot \mu_{n,m}^R = \mu_{n,m}^S \cdot (f_n \wedge f_m)$.

Bemerkung Jedem symmetrischen Ringspektrum R liegt ein symmetrisches Spektrum zu Grunde. Nämlich man definiert zuerst induktiv höhere Einheitsabbildungen $\iota_n = \mu_{n-1,1} \cdot (\iota_{n-1} \wedge \iota_1) : T^n \rightarrow R_n$. Diese sind Σ_n -äquivariant. Denn nach Induktion ist ι_{n-1} Σ_{n-1} -äquivariant und damit ι_n $(\Sigma_{n-1} + 1)$ -äquivariant. Da Σ_n von $\chi_{n-1,1}$ und $\Sigma_{n-1} + 1$ erzeugt wird, folgt aus der Zentralität von ι_1 , dass ι_n Σ_n -äquivariant ist.

Dann sind die Abbildungen $\mu_{n,m} \cdot (R_n \wedge \iota_m) : R_n \wedge T^m \rightarrow R_{n+m}$ $\Sigma_n \times \Sigma_m$ -äquivariant und definieren Strukturabbildungen $\sigma_n^m R$, da $\sigma_n^{m+1} R = \mu_{n,m+1} \cdot (R_n \wedge \iota_{m+1}) = \mu_{n,m+1} \cdot (R_n \wedge [\mu_{m,1} \cdot (\iota_m \wedge \iota_1)]) = \mu_{n+m,1} \cdot (\mu_{n,m} \wedge R_1) \cdot (R_n \wedge \iota_m \wedge \iota_1) = \sigma_{n+m}^1 R \cdot (\sigma_n^m R \wedge T)$ gilt.

Beispiel Das algebraische Cobordismus-Spektrum (siehe Abschnitt 6.2.3) wird als symmetrisches Ringspektrum konstruiert.

Bemerkung Aufgrund der Assoziativität von $\mu_{n,m}$ können wir auch in der üblichen Weise iterierte Multiplikationsabbildungen μ_{n_1, \dots, n_k} definieren, die wiederum assoziativ sind, siehe [Sch09, S. 11, Remark 1.6 (i)].

Definition 3.11. Eine Abbildung $f : A \rightarrow R_m$ mit $m \geq 0$, wo R ein symmetrisches Ringspektrum ist, heißt zentral, falls für alle $n \geq 0$

$$\chi_{n,m} \cdot \mu_{n,m} \cdot (R_n \wedge f) = \mu_{m,n} \cdot (f \wedge R_n) \cdot t_{R_n,A}$$

gilt.

Verknüpfungen von zentralen Abbildungen sind zentral:

Lemma 3.12. Sei R ein symmetrisches Ringspektrum und $A \xrightarrow{a} R_\alpha, B \xrightarrow{b} R_\beta$ zwei zentrale Abbildungen, dann ist $c : A \wedge B \xrightarrow{a \wedge b} R_\alpha \wedge R_\beta \xrightarrow{\mu_{\alpha,\beta}} R_{\alpha+\beta}$ ebenso zentral.

Beweis. Die Teile des folgenden Diagramms kommutieren wegen der Zentralität von b und c , der Assoziativität von R sowie der Äquivarianz der Multiplikationsabbildung:

$$\begin{array}{ccccccc} A \wedge B \wedge R_\gamma & \xrightarrow{a \wedge 1} & R_\alpha \wedge B \wedge R_\gamma & \xrightarrow{1 \wedge b \wedge 1} & R_\alpha \wedge R_\beta \wedge R_\gamma & \xrightarrow{1 \wedge \mu_{\beta,\gamma}} & R_\alpha \wedge R_{\beta+\gamma} & \xrightarrow{\mu_{\alpha,\beta+\gamma}} & R_{\alpha+\beta+\gamma} \\ \downarrow 1 \wedge t_{B,R_\gamma} & & \downarrow 1 \wedge t_{B,R_\gamma} & & & & \downarrow 1 \wedge \chi_{\beta,\gamma} & & \downarrow \alpha + \chi_{\beta,\gamma} \\ A \wedge R_\gamma \wedge B & \xrightarrow{a \wedge 1} & R_\alpha \wedge R_\gamma \wedge B & \xrightarrow{1 \wedge b} & R_\alpha \wedge R_\gamma \wedge R_\beta & \xrightarrow{1 \wedge \mu_{\gamma,\beta}} & R_\alpha \wedge R_{\gamma+\beta} & \xrightarrow{\mu_{\alpha,\gamma+\beta}} & R_{\alpha+\gamma+\beta} \\ \parallel & & & & \parallel & & & & \parallel \\ A \wedge R_\gamma \wedge B & \xrightarrow{1 \wedge b} & A \wedge R_\gamma \wedge R_\beta & \xrightarrow{a \wedge 1} & R_\alpha \wedge R_\gamma \wedge R_\beta & \xrightarrow{\mu_{\alpha,\gamma} \wedge 1} & R_{\alpha+\gamma} \wedge R_\beta & \xrightarrow{\mu_{\alpha+\gamma,\beta}} & R_{\alpha+\gamma+\beta} \\ \downarrow t_{A,R_\gamma} \wedge B & & \downarrow t_{A,R_\gamma} \wedge 1 & & & & \downarrow \chi_{\alpha,\gamma} \wedge 1 & & \downarrow \chi_{\alpha,\gamma} + \beta \\ R_\gamma \wedge A \wedge B & \xrightarrow{1 \wedge b} & R_\gamma \wedge A \wedge R_\beta & \xrightarrow{1 \wedge a \wedge 1} & R_\gamma \wedge R_\alpha \wedge R_\beta & \xrightarrow{\mu_{\alpha,\gamma} \wedge 1} & R_{\gamma+\alpha} \wedge R_\beta & \xrightarrow{\mu_{\alpha+\gamma,\beta}} & R_{\gamma+\alpha+\beta} \end{array}$$

Die Kommutativität des äußeren Rechtecks ergibt dann die Behauptung. \square

Definition 3.13. Ein symmetrisches Ringspektrum R heißt kommutativ, falls für alle $n, m \geq 0$

$$\begin{array}{ccc} R_n \wedge R_m & \xrightarrow{\mu_{n,m}} & R_{n+m} \\ \downarrow t_{R_n,R_m} & & \downarrow \chi_{n,m} \\ R_m \wedge R_n & \xrightarrow{\mu_{m,n}} & R_{m+n} \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung Für symmetrisches Ringspektrum R impliziert die Kommutativität schon die Zentralität (von ι_1).

Als nächstes definieren wir die Lokalisierung eines symmetrischen Ringspektrums R an einer zentralen Abbildung $x : T^l \rightarrow R_m$:

Proposition-Definition 3.14. Sei R ein symmetrisches Ringspektrum und $x : T^l \rightarrow R_m$ eine zentrale Abbildung. Wir definieren ein symmetrisches Ringspektrum $R[1/x]$ zusammen mit einer Abbildung von symmetrischen Ringspektren $j : R \rightarrow R[1/x]$.

Levelweise sei $R[1/x]_p = \text{Hom}(T^{lp}, R_{(1+m)p})$. Wir haben Abbildungen

$\Delta_{s,p} : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_{sp}$, $\Delta_{s,p}(\gamma)(i + s \cdot (j - 1)) = i + s \cdot (\gamma(j) - 1)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq p$, die die p Summanden von $sp = s + s + \dots + s$ permutieren. Dann operiert Σ_p via $\Delta_{l,p}$ auf T^{lp} und via $\Delta_{1+m,p}$ auf $R_{(1+m)p}$ und schließlich mit diesen Wirkungen per Konjugation auf $\text{Hom}(T^{lp}, R_{(1+m)p})$, d.h. es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R[1/x]_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{\gamma \wedge 1} & R[1/x]_p \wedge T^{lp} \\ \downarrow 1 \wedge \Delta_{l,p}(\gamma^{-1}) & & \downarrow ev \\ R[1/x]_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{ev} R_{(1+m)p} \xrightarrow{\Delta_{1+m,p}(\gamma)} & R_{(1+m)p} \end{array}$$

Die Multiplikationsabbildung $\mu_{p,q} : R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \rightarrow R[1/x]_{p+q}$ sei die Abbildung, die adjungiert zu

$$R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \wedge T^{l(p+q)} \xrightarrow{1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1} R[1/x]_p \wedge T^{lp} \wedge R[1/x]_q \wedge T^{lq} \xrightarrow{ev \wedge ev} R_{(1+m)p} \wedge R_{(1+m)q} \xrightarrow{\mu_{(1+m)p, (1+m)q}} R_{(1+m)(p+q)}$$

Die Einheitsabbildung von $R[1/x]$ ist die Komposition von der Einheitsabbildung von R mit j .

Die Abbildung j ist levelweise die Abbildung $j_p : R_p \rightarrow R[1/x]_p$, die adjungiert zu $R_p \wedge T^{lp} \xrightarrow{1 \wedge x^p} R_p \wedge R_{mp} \xrightarrow{\mu_{p,mp}} R_{p+mp} \xrightarrow{\xi_{m,p}} R_{(1+m)p}$ ist,

wobei für $p \geq 1$ x^p die Abbildung $T^{lp} \xrightarrow{x^p} R_m^{\wedge p} \xrightarrow{\mu_{m,m,\dots,m}} R_{mp}$ ist, und x^0 gleich der Einheitsabbildung ι_0^R ist. Die Permutation $\xi_{m,p} \in \Sigma_{(1+m)p}$ wird so definiert:

$\xi_{m,p}(k) = \begin{cases} 1 + (1+m) \cdot (k-1) & \text{falls } 1 \leq k \leq p \\ 1 + j + (1+m)(i-1) & \text{falls } k = p + mi + j \text{ mit } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m \end{cases}$ also grob gesagt werden die ersten p Elemente vor die p Summanden von $mp = m + m + \dots + m$ verschoben, jeweils immer nur eines.

Beweis. • Die Äquivarianz der Multiplikationsabbildung

Seien $(\gamma, \delta) \in \Sigma_p \times \Sigma_q \subseteq \Sigma_{p+q}$. Es ist zu zeigen, dass $(\gamma + \delta) \cdot \mu_{p,q}^{R[1/x]} = \mu_{p,q}^{R[1/x]} \cdot (\gamma \wedge \delta)$. Die linke Seite ist adjungiert zu

$$\Delta_{1+m,p+q}(\gamma + \delta) \cdot \widehat{\mu_{p,q}^{R[1/x]}} \cdot (R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \wedge \Delta_{1+m,p+q}(\gamma + \delta)^{-1}) \\ = \Delta_{1+m,p+q}(\gamma + \delta) \cdot \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \cdot (R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \wedge \Delta_{l,p+q}(\gamma + \delta)^{-1}).$$

$$\begin{aligned} & \text{Die rechte Seite ist adjungiert zu } \widehat{\mu_{p,q}^{R[1/x]}} \cdot (\gamma \wedge \delta \wedge T^{l(p+q)}) \\ & = \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \cdot (\gamma \wedge \delta \wedge T^{l(p+q)}) \\ & = \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (\gamma \wedge T^{lp} \wedge \delta \wedge T^{lq}) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \\ & = \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot ((ev \cdot (\gamma \wedge T^{lp})) \wedge (ev \cdot (\delta \wedge T^{lq}))) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \\ & = \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot ([\Delta_{1+m,p}(\gamma) \cdot ev \cdot (1 \wedge \Delta_{l,p}(\gamma)^{-1})] \wedge [\Delta_{1+m,q}(\delta) \cdot ev \cdot (1 \wedge \Delta_{l,q}(\delta)^{-1})]) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \\ & = [\Delta_{1+m,p}(\gamma) + \Delta_{1+m,q}(\delta)] \cdot \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \cdot (R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \wedge [\Delta_{l,p}(\gamma)^{-1} \wedge \Delta_{l,q}(\delta)^{-1}]) \\ & = \Delta_{1+m,p+q}(\gamma + \delta) \cdot \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \cdot (R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \wedge \Delta_{l,p+q}(\gamma + \delta)^{-1}). \end{aligned}$$

Also haben beide Seiten gleiche Adjungierte und sind somit gleich.

• Assoziativität

Es ist zu zeigen, dass $\mu_{n+p,q}^{R[1/x]} \cdot (\mu_{n,p}^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_q) = \mu_{n,p+q}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \mu_{p,q}^{R[1/x]})$ für alle $n, p, q \geq 0$.

Die linke Seite ist adjungiert zu: $\widehat{\mu_{n+p,q}^{R[1/x]}} \cdot (\mu_{n,p}^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_q \wedge T^{l(n+p+q)})$

$$\begin{aligned} & = \mu_{(1+m)(n+p), (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{l(n+p)}} \wedge 1) \cdot (\mu_{n,p}^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_q \wedge T^{l(n+p+q)}) \\ & = \mu_{(1+m)(n+p), (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (\mu_{n,p}^{R[1/x]} \wedge T^{l(n+p)} \wedge R[1/x]_q \wedge T^{lq}) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{l(n+p)}} \wedge 1) \\ & = \mu_{(1+m)(n+p), (1+m)q}^R \cdot ((ev \cdot (\mu_{n,p}^{R[1/x]} \wedge T^{l(n+p)})) \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{l(n+p)}} \wedge 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{(1+m)(n+p), (1+m)q}^R \cdot ([\mu_{(1+m)n, (1+m)p}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p, T^{ln}} \wedge 1)] \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{l(n+p)}} \wedge 1) \\
&= [\mu_{(1+m)(n+p), (1+m)q}^R \cdot (\mu_{(1+m)n, (1+m)p}^R \wedge R_{(1+m)q}) \cdot (ev \wedge ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p, T^{ln}} \wedge 1) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{l(n+p)}} \wedge 1)].
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist adjungiert zu: $\mu_{n, p+q}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \mu_{p, q}^{R[1/x]} \wedge T^{l(n+p+q)})$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{(1+m)n, (1+m)(p+q)}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_{p+q}, T^{ln}} \wedge 1) \cdot (R[1/x]_n \wedge \mu_{p, q}^{R[1/x]} \wedge T^{l(n+p+q)}) \\
&= \mu_{(1+m)n, (1+m)(p+q)}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_n \wedge T^{ln} \wedge \mu_{p, q}^{R[1/x]} \wedge T^{l(p+q)}) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q, T^{ln}} \wedge 1) \\
&= \mu_{(1+m)n, (1+m)(p+q)}^R \cdot (ev \wedge [ev \cdot (\mu_{p, q}^{R[1/x]} \wedge T^{l(p+q)})]) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q, T^{ln}} \wedge 1) \\
&= \mu_{(1+m)n, (1+m)(p+q)}^R \cdot (ev \wedge [\mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1)]) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q, T^{ln}} \wedge 1) \\
&= [\mu_{(1+m)n, (1+m)(p+q)}^R \cdot (R_{(1+m)q} \wedge \mu_{(1+m)p, (1+m)q}^R) \cdot (ev \wedge ev \wedge ev) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_q, T^{lp}} \wedge 1) \cdot (1 \wedge t_{R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q, T^{ln}} \wedge 1)].
\end{aligned}$$

Die rechte und die linke Seite sind gleich, denn die Multiplikationsabbildung von R ist assoziativ und die beiden Permutationen stimmen auch überein.

- **Einheit**

Zu zeigen ist: $\mu_{n, 0}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_0^{R[1/x]}) = (R[1/x]_n \wedge S^0 \xrightarrow{\cong} R[1/x]_n)$. Die linke Seite ist adjungiert zu: $ev \cdot ((\mu_{n, 0}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_0^{R[1/x]})) \wedge T^{ln})$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{(1+m)n, 0}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{R[1/x]_0, T^{ln}}) \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_0^{R[1/x]} \wedge T^{ln}) = \mu_{(1+m)n, 0}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_n \wedge T^{ln} \wedge \iota_0^{R[1/x]}) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{S^0, T^{ln}}) = \mu_{(1+m)n, 0}^R \cdot (1 \wedge \iota_0^R) \cdot (ev \wedge 1) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{S^0, T^{ln}}) \\
&= pr_1 \cdot (ev \wedge 1) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{S^0, T^{ln}}) = ev \cdot (pr_1 \wedge T^{ln})
\end{aligned}$$

letzterer Ausdruck ist adjungiert zur obigen Projektion.

- **Zentralität**

Wir müssen zeigen, dass

$$\chi_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot \mu_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_1^{R[1/x]}) = \mu_{1, n}^{R[1/x]} \cdot (\iota_1^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_n) \cdot t_{R[1/x]_n, T}$$

Die rechte Seite ist adjungiert zu:

$$\begin{aligned}
&ev \cdot (\mu_{1, n}^{R[1/x]} \wedge T^{l(1+n)}) \cdot (\iota_1^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_n \wedge T^{l(1+n)}) \cdot (t_{R[1/x]_n, T} \wedge T^{l(1+n)}) \\
&= \mu_{(1+m)1, (1+m)n}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_1 \wedge t_{R[1/x]_n, T^{l(1+n)}}) \cdot (\iota_1^{R[1/x]} \wedge R[1/x]_n \wedge T^{l(1+n)}) \cdot (t_{R[1/x]_n, T} \wedge T^{l(1+n)}) \\
&= \mu_{(1+m)1, (1+m)n}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (\iota_1^{R[1/x]} \wedge 1) \cdot (t_{R[1/x]_n, T} \wedge T^{ln}) \\
&= \mu_{(1+m)1, (1+m)n}^R \cdot ([\mu_{1, m}^R \cdot (1 \wedge x) \cdot (\iota_1^R \wedge T^l)] \wedge ev) \cdot (t_{R[1/x]_n, T} \wedge T^{ln}) \\
&= \mu_{(1+m)1, (1+m)n}^R \cdot ([\mu_{1, m}^R \cdot (\iota_1^R \wedge x)] \wedge R_{(1+m)n}) \cdot t_{R_{(1+m)n}, T \wedge T^l} \cdot (ev \wedge 1) \cdot t_{T \wedge T^l, R[1/x]_n \wedge T^{ln}} \cdot (t_{R[1/x]_n, T} \wedge T^{ln}) \\
&= [\mu_{(1+m)1, (1+m)n}^R \cdot ([\mu_{1, m}^R \cdot (\iota_1^R \wedge x)] \wedge R_{(1+m)n}) \cdot t_{R_{(1+m)n}, T \wedge T^l} \cdot (ev \wedge 1) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{T \wedge T^l, T^{ln}})]
\end{aligned}$$

Die linke Seite ist adjungiert zu:

$$\begin{aligned}
&ev \cdot ([\chi_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot \mu_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_1^{R[1/x]})] \wedge T^{l(1+n)}) \\
&= \Delta_{1+m, n+1}(\chi_{n, 1})^R \cdot ev \cdot (1 \wedge \Delta_{l, n+1}(\chi_{n, 1}^{-1})) \cdot ([\mu_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_1^{R[1/x]})] \wedge T^{l(1+n)}) \\
&= \chi_{(1+m)n, (1+m)1}^R \cdot ev \cdot ([\mu_{n, 1}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_1^{R[1/x]})] \wedge T^{l(n+1)}) \cdot (1 \wedge \chi_{l, ln}) \\
&= \chi_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot \mu_{(1+m)n, (1+m)1}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{R[1/x]_1, T^{ln}} \wedge T^l) \cdot (R[1/x]_n \wedge \iota_1^{R[1/x]} \wedge T^{l(n+1)}) \cdot (1 \wedge t_{T^l, T^{ln}}) \\
&= \chi_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot \mu_{(1+m)n, (1+m)1}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_n \wedge T^{ln} \wedge \iota_1^{R[1/x]} \wedge T^l) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{T, T^{ln}} \wedge T^l) \cdot (1 \wedge t_{T^l, T^{ln}}) \\
&= \chi_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot \mu_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot (ev \wedge [\mu_{1, m}^R \cdot (1 \wedge x) \cdot (\iota_1^R \wedge T^l)]) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{T \wedge T^l, T^{ln}}) \\
&= [\chi_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot \mu_{(1+m)n, 1+m}^R \cdot (1 \wedge [\mu_{1, m}^R \cdot (\iota_1^R \wedge x)])] \cdot (ev \wedge 1) \cdot (R[1/x]_n \wedge t_{T \wedge T^l, T^{ln}}).
\end{aligned}$$

Die jeweils letzten Ausdrücke sind nach Lemma 3.12 gleich (Zentralität von $\mu_{1, m}^R \cdot (\iota_1^R \wedge x)$).

- **Äquivarianz von j**

Sei $\gamma \in \Sigma_p$. Wir haben folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
R_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{1 \wedge \Delta_{l, p}(\gamma^{-1})} & R_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{1 \wedge x^p} & R_p \wedge R_{mp} & \xrightarrow{\mu_{p, mp}} & R_{p+mp} & \xrightarrow{\xi_{m, p}} & R_{(1+m)p} \\
\downarrow \gamma \wedge 1 & & \downarrow \gamma \wedge \Delta_{l, p}(\gamma) & & \downarrow \gamma \wedge \Delta_{m, p}(\gamma) & & \downarrow \gamma \wedge \Delta_{m, p}(\gamma) & & \downarrow \Delta_{1+m, p}(\gamma) \\
R_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{=} & R_p \wedge T^{lp} & \xrightarrow{1 \wedge x^p} & R_p \wedge R_{mp} & \xrightarrow{\mu_{p, mp}} & R_{p+mp} & \xrightarrow{\xi_{m, p}} & R_{(1+m)p}
\end{array}$$

Nach Definition der Permutationen kommutiert das ganz rechte Rechteck. Das gesamte Diagramm kommutiert dann, weil folgendes Rechteck kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
T^{lp} & \xrightarrow{x^p} & R_{mp} \\
\downarrow \Delta_{l,p}(\gamma) & & \downarrow \Delta_{m,p}(\gamma) \\
T^{lp} & \xrightarrow{x^p} & R_{mp}
\end{array}$$

Dies lässt sich durch Komposition auf den Fall einer Transposition $\gamma = \tau_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq p-1$ zurückführen:

$$\begin{array}{ccccccc}
T^{lp} = T^{l(i-1)} \wedge T^2 \wedge T^{l(p-i-1)} & \xrightarrow{x^p} & R_m^{\wedge n-1} \wedge R_m^{\wedge 2} \wedge R_m^{\wedge p-n-1} & \xrightarrow{1 \wedge \mu_{m,m} \wedge 1} & R_m^{\wedge n-1} \wedge R_{m2} \wedge R_m^{\wedge p-n-1} & \xrightarrow{\mu_{m,\dots,m,m,2,m,\dots,m}} & R_{mp} \\
\downarrow \Delta_{l,p}(\tau_{i,i+1}) = 1 \wedge t_{T,T} \wedge 1 & & \downarrow 1 \wedge t_{R_m,R_m} \wedge 1 & & \downarrow 1 \wedge \chi_{m,m} \wedge 1 & & \downarrow \Delta_{m,p}(\tau_{i,i+1}) \\
T^{lp} = T^{l(i-1)} \wedge T^2 \wedge T^{l(p-i-1)} & \xrightarrow{x^p} & R_m^{\wedge n-1} \wedge R_m^{\wedge 2} \wedge R_m^{\wedge p-n-1} & \xrightarrow{1 \wedge \mu_{m,m} \wedge 1} & R_m^{\wedge n-1} \wedge R_{m2} \wedge R_m^{\wedge p-n-1} & \xrightarrow{\mu_{m,\dots,m,m,2,m,\dots,m}} & R_{mp}
\end{array}$$

was kommutiert, da x zentral ist.

Somit gilt: $\gamma^{R[1/x]} \cdot j_p = j_p \cdot \gamma^R$.

- **Multiplikatilität von j**

Zu zeigen ist, dass das folgende Rechteck kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
R_p \wedge R_q & \xrightarrow{j_p \wedge j_q} & R[1/x]_p \wedge R[1/x]_q \\
\downarrow \mu_{p,q}^R & & \downarrow \mu_{p,q}^{R[1/x]} \\
R_{p+q} & \xrightarrow{j_{p+q}} & R[1/x]_{p+q}
\end{array}$$

Die Komposition über die untere Ecke ist adjungiert zu:

$$\begin{aligned}
ev \cdot [(j_{p+q} \cdot \mu_{p,q}^R) \wedge T^{l(p+q)}] &= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p+q,m(p+q)} \cdot (\mu_{p,q} \wedge x^{p+q}) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p+q,m(p+q)} \cdot (\mu_{p,q} \wedge [\mu_{mp,mq} \cdot (x^p \wedge x^q)]) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p+q,m(p+q)} \cdot (\mu_{p,q} \wedge \mu_{mp,mq}) \cdot (R_p \wedge R_q \wedge x^p \wedge x^q) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p,q+m(p+q)} \cdot (1 \wedge \mu_{q+mp,mq}) \cdot (1 \wedge \mu_{q,mp} \wedge 1) \cdot (R_p \wedge R_q \wedge x^p \wedge x^q)
\end{aligned}$$

Die Komposition über die obere Ecke ist adjungiert zu:

$$\begin{aligned}
ev \cdot ([\mu_{p,q}^{R[1/x]} \cdot (j_p \wedge j_q)] \wedge T^{l(p+q)}) &= \mu_{(1+m)p,(1+m)q} \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_p \wedge t_{R[1/x]_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \cdot (j_p \wedge j_q \wedge T^{l(p+q)}) \\
&= \mu_{(1+m)p,(1+m)q} \cdot (ev \wedge ev) \cdot (j_p \wedge T^{lp} \wedge j_q \wedge T^{lq}) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \mu_{(1+m)p,(1+m)q} \cdot ([ev \cdot (j_p \wedge T^{lp})] \wedge [ev \cdot (j_q \wedge T^{lq})]) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \mu_{(1+m)p,(1+m)q} \cdot ([\xi_{m,p} \cdot \mu_{p,mp} \cdot (R_p \wedge x^p)] \wedge [\xi_{m,q} \cdot \mu_{q,mq} \cdot (R_q \wedge x^q)]) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \mu_{(1+m)p,(1+m)q} \cdot (\xi_{m,p} \wedge \xi_{m,q}) \cdot (\mu_{p,mp} \wedge \mu_{q,mq}) \cdot (R_p \wedge x^p \wedge R_q \wedge x^q) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= (\xi_{m,p} + \xi_{m,q}) \cdot \mu_{p+mp,q+mq} \cdot (\mu_{p,mp} \wedge \mu_{q,mq}) \cdot (R_p \wedge x^p \wedge R_q \wedge x^q) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot (p + \chi_{mp,q} + mq) \cdot \mu_{p+mp,q+mq} \cdot (\mu_{p,mp} \wedge \mu_{q,mq}) \cdot (R_p \wedge x^p \wedge R_q \wedge x^q) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot (p + \chi_{mp,q} + mq) \cdot \mu_{p,mp+q+mq} \cdot (1 \wedge \mu_{mp+q,mq}) \cdot (1 \wedge \mu_{mp,q} \wedge 1) \cdot (R_p \wedge x^p \wedge R_q \wedge x^q) \cdot (R_p \wedge t_{R_q,T^{lp}} \wedge T^{lq}) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p,q+mp+mq} \cdot (1 \wedge \mu_{q+mp,mq}) \cdot (R_p \wedge [\chi_{mp,q} \cdot \mu_{mp,q} \cdot (x^p \wedge R_q) \cdot t_{R_q,T^{lp}}] \wedge x^q) \\
&= \xi_{m,p+q} \cdot \mu_{p,q+mp+mq} \cdot (1 \wedge \mu_{q+mp,mq}) \cdot (R_p \wedge [R_q \wedge x^p] \wedge x^q)
\end{aligned}$$

letzte Gleichheit folgt aus der Zentralität von x^p (siehe Lemma 3.12). Damit kommutiert obiges Diagramm. □

Als Beispiel beweisen wir, dass die Kommutativität unter Lokalisierungen erhalten bleibt:

Lemma 3.15. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition-Definition 3.14. Falls R kommutativ ist, so ist auch $R[1/x]$ kommutativ.*

Beweis. Zeigen müssen wir: $\chi_{a,b}^{R[1/x]} \cdot \mu_{a,b}^{R[1/x]} = \mu_{b,a}^{R[1/x]} \cdot t_{R[1/x]_a,R[1/x]_b}$.

Ihre Adjungierten sind gleich:

$$\begin{aligned}
ev \cdot ([\chi_{a,b}^{R[1/x]} \cdot \mu_{a,b}^{R[1/x]}] \wedge T^{l(a+b)}) &= \Delta_{1+m,a+b}(\chi_{a,b})^R \cdot ev \cdot (1 \wedge \Delta_{l,a+b}(\chi_{a,b}^{-1})) \cdot (\mu_{a,b}^{R[1/x]} \wedge T^{l(a+b)}) \\
&= \Delta_{1+m,a+b}(\chi_{a,b})^R \cdot [ev \cdot (\mu_{a,b}^{R[1/x]} \wedge T^{l(a+b)})] \cdot (1 \wedge \Delta_{l,a+b}(\chi_{a,b}^{-1})) \\
&= \chi_{(1+m)a,(1+m)b}^R \cdot [\mu_{(1+m)a,(1+m)b}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_a \wedge t_{R[1/x]_b,T^{la}} \wedge T^{lb})] \cdot (1 \wedge t_{T^{lb},T^{la}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underset{\text{kommutativ}}{\mu_{(1+m)b,(1+m)a}^R \cdot t_{R(1+m)a,R(1+m)b}} \cdot (ev \wedge ev) \cdot (R[1/x]_a \wedge t_{R[1/x]_b,T^{la}} \wedge T^{lb}) \cdot (1 \wedge t_{T^{lb},T^{la}}) \\
&= \mu_{(1+m)b,(1+m)a}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot [t_{R[1/x]_a \wedge T^{la},R[1/x]_b \wedge T^{lb}} \cdot (R[1/x]_a \wedge t_{R[1/x]_b,T^{la}} \wedge T^{lb}) \cdot (1 \wedge t_{T^{lb},T^{la}})] \\
&= \mu_{(1+m)b,(1+m)a}^R \cdot (ev \wedge ev) \cdot [(R[1/x]_b \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lb}} \wedge T^{la}) \cdot (t_{R[1/x]_a,R[1/x]_b} \wedge T^{l(a+b)})] \\
&= ev \cdot ([\mu_{b,a}^{R[1/x]} \cdot t_{R[1/x]_a,R[1/x]_b}] \wedge T^{l(b+a)}) \quad \square
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Lemmata werden in Kapitel 7 gebraucht:

Lemma 3.16. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition-Definition 3.14. Der Morphismus $j_m x : T^l \rightarrow R[1/x]_m$ ist zentral.*

Beweis. Zu zeigen ist: $\chi_{m,a}^{R[1/x]} \cdot \mu_{m,a}^{R[1/x]} \cdot ((j_m x) \wedge R[1/x]_a) = \mu_{a,m}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_a \wedge (j_m x)) \cdot t_{T^l,R[1/x]_a}$.

Nach Lemma 3.12 wissen wir schon, dass x^{1+m} zentral ist. Außerdem wissen wir, dass $\mu_{m,mm}^R \cdot (x \wedge x^m) = x^{1+m}$ ist. Betrachten wir die Adjungierten:

$$\begin{aligned}
&ev \cdot ([\chi_{m,a}^{R[1/x]} \cdot \mu_{m,a}^{R[1/x]} \cdot ((j_m x) \wedge R[1/x]_a)] \wedge T^{l(m+a)}) \\
&= \chi_{(1+m)m,(1+m)a}^R \cdot \mu_{(1+m)a,(1+m)a}^R \cdot [(ev \cdot (j_m x \wedge T^{lm})) \wedge ev] \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}}) \\
&= \chi_{(1+m)m,(1+m)a}^R \cdot \mu_{(1+m)m,(1+m)a}^R \cdot [(\xi_{m,m}^R \cdot \mu_{m,mm}^R \cdot (x \wedge x^m)) \wedge ev] \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}}) \\
&= ((1+m)a + \xi_{m,m}^R) \cdot [\chi_{(1+m)m,(1+m)a}^R \cdot \mu_{(1+m)m,(1+m)a}^R \cdot (x^{1+m} \wedge 1)] \cdot (1 \wedge ev) \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}}) \\
&= ((1+m)a + \xi_{m,m}^R) \cdot [\mu_{(1+m)a,(1+m)m}^R \cdot (1 \wedge x^{1+m}) \cdot t_{T^{l(1+m)},R(1+m)a}] \cdot (1 \wedge ev) \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}}) \\
&= \mu_{(1+m)a,(1+m)m}^R \cdot (ev \wedge (\xi_{m,m}^R \cdot \mu_{m,mm}^R \cdot (x \wedge x^m))) \cdot t_{T^{l(1+m)},R[1/x]_a \wedge T^{la}} \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}}) \\
&= \mu_{(1+m)a,(1+m)m}^R \cdot (ev \wedge (j_m x \wedge T^{lm})) \cdot [t_{T^{l(1+m)},R[1/x]_a \wedge T^{la}} \cdot (T^l \wedge t_{R[1/x]_a,T^{lm}} \wedge T^{la}) \cdot (T^l \wedge R[1/x]_a \wedge t_{T^{la},T^{lm}})] \\
&= [\mu_{(1+m)a,(1+m)m}^R \cdot (ev \wedge (ev \cdot (j_m x \wedge T^{lm}))) \cdot (R[1/x]_a \wedge t_{T^l,T^{la}} \wedge T^{lm})] \cdot (t_{T^l,R[1/x]_a} \wedge T^{l(a+m)}) \\
&= ev \cdot ([\mu_{a,m}^{R[1/x]} \cdot (R[1/x]_a \wedge j_m x)] \cdot t_{T^l,R[1/x]_a}] \wedge T^{l(a+m)}) \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 3.17. *Sei $\gamma \in \Sigma_p$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Vorzeichen: $sgn(\Delta_{s,p}(\gamma)) = sgn(\gamma)^s$.*

Beweis. Die Abbildung $\Delta_{s,p} : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_{sp}$ ist unmittelbar nach Definition ein Gruppenhomomorphismus. Darum genügt es, die Relation für Erzeuger ($\sigma_i = \tau_{i,i+1}, 1 \leq i \leq p-1$) zu zeigen. Es gilt aber $\Delta_{s,p}(\sigma_i) = (s(i-1) + \chi_{s,s} + s(p-(i+1)))$ und somit $sgn(\Delta_{s,p}(\sigma_i)) = sgn(\chi_{s,s}) = (-1)^{s^2} = (-1)^s = sgn(\sigma_i)^s$. \square

3.3 Modellstruktur

Wir wollen zunächst annehmen, dass $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine symmetrisch monoidale Modellkategorie ist [Hov1, Def. 4.2.6, S. 108] und T ein cofaserndes Objekt in \mathcal{D} . Dann ist $-\wedge T$ ein linker Quillen-Funktor. Sei $\Omega = Hom(T, -)$.

Beispiel Beispiele für monoidale Modellkategorien sind:

- die Modellkategorie der simplizialen Mengen $sSet$ mit dem gewöhnlichen Produkt und dem terminalen Objekt $*$ als Einheitsobjekt [Hov1, Cor. 4.2.8, S. 109].
- die Modellkategorie der punktierten simplizialen Mengen $sSet_*$ mit dem gewöhnlichen Smash-Produkt und der 0-Sphäre als Einheitsobjekt [Hov1, Cor. 4.2.10, S. 110].
- die Kategorie $M.(S)$ (siehe Abschnitt 2.4), zusammen mit der motivisch projektiven oder motivisch abgeschlossen-flasquen Modellstruktur und dem objektweise gegebenen Smash-Produkt (siehe Theorem 2.43 und [DRØ, Corollary 2.19]).

In den ersten beiden Beispielen sind die (punktierten) endlichen simplizialen Mengen T cofasernd und für diese erhält $Hom(T, -)$ sequentielle Colimites [Hov1, Lemma 3.1.2].

Bemerkung Referenzen für die Definitionen der im Folgenden benutzten Begriffe werden hier kurz angegeben:

- „cofasernd erzeugt“ [Hi, Def. 11.1.2] (Beispiel: $sSet_*$ [Hov1, Cor. 3.6.6])
- „zellulär“ [Hi, Def. 12.1.1] (für Beispiele wie $sSet_*$ siehe [Hi, 12.1.3]).
- „links-eigentlich“, „rechts-eigentlich“ und „eigentlich“ [Hi, Def. 13.1.1] (für Beispiele wie $sSet_*$ siehe [Hi, 13.1.6], insbesondere [Hi, Theorem 13.1.13])

In den nächsten Definitionen werden die levelweise und die stabile Modellstruktur definiert.

Definition 3.18 ([Hov2, Def. 1.8]). Sei $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung von T -Spektren oder symmetrischen T -Spektren. Dann heißt f

- levelweise Äquivalenz oder Level-Äquivalenz, falls alle $f_i, i \in \mathbb{N}_0$, schwache Äquivalenzen sind,
- levelweise (triviale) Faserung, falls alle $f_i, i \in \mathbb{N}_0$, (triviale) Faserungen sind,
- levelweise (triviale) Cofaserung, falls alle $f_i, i \in \mathbb{N}_0$, (triviale) Cofaserungen sind,
- projektive Cofaserung, falls f die linke Hochhebungseigenschaft bezüglich aller levelweiser trivialer Faserungen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ bzw. $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ hat und
- injektive Faserung, falls f die rechte Hochhebungseigenschaft bezüglich aller levelweiser trivialer Cofaserungen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ bzw. $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ hat.

Ein (symmetrisches) T -Spektrum E heißt level-fasernd, falls für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Objekte E_n fasernd sind.

Definition 3.19 ([Hov2, Theorem 1.14]). • Die projektive levelweise (auch: levelweise projektive) Modellstruktur auf der Kategorie der (symmetrischen) T -Spektren ist eine Modellstruktur ([Hov1, Def. 1.1.3]) mit levelweise schwachen Äquivalenzen als schwache Äquivalenzen, levelweisen Faserungen als Faserungen und projektiven Cofaserungen als Cofaserungen.

- Die injektive levelweise Modellstruktur auf der Kategorie der (symmetrischen) T -Spektren ist eine Modellstruktur mit levelweise schwachen Äquivalenzen als schwache Äquivalenzen, injektiven Faserungen als Faserungen und levelweisen Cofaserungen als Cofaserungen.

Definition 3.20. Falls die jeweilige projektive levelweise Modellstruktur existiert, so sei $1 \rightarrow J$ bzw. $1 \rightarrow J^\Sigma$ die funktorielle fasernde Approximation [Hi, Def. 8.1.15 (2) (a)].

Definition 3.21 ([Hov2, Def. 3.3]). Die stabile Modellstruktur auf der Kategorie der (symmetrischen) T -Spektren ist die linke Bousfield-Lokalisierung ([Hi, Def. 3.3.1]) der projektiven levelweisen Modellstruktur bezüglich der

Klasse $\mathcal{S} = \{F_{n+1}(A \wedge T) \xrightarrow{s_n^A} F_n A; n \geq 0 \text{ und } A \in \mathcal{D} \text{ cofasernd}\}$ von Abbildungen. Dabei ist F_n der links-adjungierte Funktor zur Auswertung $Ev_n : X \mapsto X_n$ am Level n . Die Abbildung s_n^A ist adjungiert zu der Abbildung $A \wedge T \xrightarrow{incl_{id}} Ev_{n+1} F_n A = \Sigma_{n+1} \times (A \wedge T)$.

Die schwachen Äquivalenzen in der stabilen Modellstruktur heißen stabile Äquivalenzen.

Bemerkung Falls die levelweise projektive Modellstruktur existiert, sind stabile Äquivalenzen definiert, nämlich als \mathcal{S} -lokale Äquivalenzen.

Die folgenden Aussagen geben Kriterien für die Existenz der levelweise projektiven und der stabilen Modellstruktur:

Theorem 3.22 ([Hov2, Theorem 1.14]). Falls \mathcal{D} cofasernd erzeugt ist, so existiert die levelweise projektive Modellstruktur auf $Sp(\mathcal{D}, T)$ (Def. 3.19). Sie ist links-eigentlich, rechts-eigentlich bzw. eigentlich, falls \mathcal{D} dies ist.

Theorem 3.23 ([Hov2, Theorem A.9]). Falls \mathcal{D} eine links-eigentliche zelluläre monoidale Modellkategorie und T ein cofaserndes Objekt ist, so sind die Kategorien $Sp(\mathcal{D}, T)$ und $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ zusammen mit der levelweise projektiven Modellstruktur links-eigentliche zelluläre Modellkategorien.

Theorem 3.24 ([Hov2, Theorem 7.2]). Falls \mathcal{D} cofasernd erzeugt ist, so existiert die levelweise projektive Modellstruktur auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ (siehe Definition 3.19). Sie ist links-eigentlich zellulär, wenn \mathcal{D} dies ist.

Corollar 3.25. Falls \mathcal{D} links-eigentlich und zellulär ist, so existieren die jeweiligen stabilen Modellkategorien (siehe [Hi, Theorem 4.1.1]).

Definition 3.26. Ein Ω -Spektrum X ist ein (symmetrisches) Spektrum, das levelweise fasernd ist und dessen Strukturabbildung schwache Äquivalenzen sind.

Bemerkung Man kann zeigen, dass, falls die stabile Modellstruktur existiert, die \mathcal{S} -lokalen Objekte genau die Ω -Spektren sind (siehe [Hov2, Theorem 3.4]).

Die nächste Proposition wird später auf den Fall, dass die Modellkategorie \mathcal{D} fast endlich erzeugt ist, angewandt (siehe Prop. 5.8).

Proposition 3.27. Es existiere die levelweise projektive und die stabile Modellstruktur auf $Sp(\mathcal{D}, T)$. Seien schwache Äquivalenzen in \mathcal{D} abgeschlossen unter sequentiellen Colimites. Dann sind stabile Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ unter sequentiellen Colimites abgeschlossen. Insbesondere sind abzählbare Verknüpfungen von stabilen Äquivalenzen stabile Äquivalenzen.

Beweis. Nach Corollar 2.7 genügt es zu zeigen, dass sequentielle Colimites von stabilen Äquivalenzen zwischen stabilen fasernden Objekten in $Sp(\mathcal{D}, T)$ stabile Äquivalenzen sind. Da die stabile Modellstruktur aber eine linke Bousfield-Lokalisierung der levelweise projektiven Modellstruktur ist, sind stabile Äquivalenzen zwischen stabilen fasernden Objekten schon Level-Äquivalenzen (siehe [Hi, Theorem 3.2.13, Prop. 3.4.1]). Nach Voraussetzung sind aber sequentielle Colimites von Level-Äquivalenzen wieder Level-Äquivalenzen, denn Colimites werden levelweise gebildet. Da Level-Äquivalenzen stabile Äquivalenzen sind, folgt die Aussage. \square

Folgendes Lemma wird im Beweis von Proposition 5.16 benutzt:

Lemma 3.28. Sei \mathcal{D} eine monoidale Modellkategorie mit Objekt T in \mathcal{D} , so dass $-\wedge T$ cofasernde Objekte erhält. Für jedes Spektrum $X \in Sp(\mathcal{D}, T)$ gibt es dann ein levelweise cofaserndes Spektrum $X^c \in Sp(\mathcal{D}, T)$ zusammen mit einer Level-Äquivalenz $f : X^c \rightarrow X$.

Beweis. Wähle zunächst für alle $n \geq 0$ triviale Faserungen $f_n : X_n^c \rightarrow X_n$, so dass X_n^c cofasernd sind. Dann erhalten wir in den Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} & & X_{n+1}^c \\ & \nearrow & \downarrow f_{n+1} \\ X_n^c \wedge T & \xrightarrow{f_n \wedge T} & X_n \wedge T \xrightarrow{\sigma_n^X} X_{n+1} \end{array}$$

Lifts, da $X_n^c \wedge T$ cofasernd ist, und diese sind die Strukturabbildung des Spektrums X^c . \square

3.4 Stabile Äquivalenzen und stabile Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt werden zwei Beispielen behandelt, in denen stabile Äquivalenzen (von Spektren) dadurch charakterisiert werden können, dass sie auf (geeigneten) stabilen Homotopiegruppen Isomorphismen induzieren. Zum Schluss wird eine verallgemeinerte Definition der stabilen Homotopiegruppen gegeben.

3.4.1 Allgemeines

Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 3.23. Für einige fast endlich erzeugte Modellkategorien können stabile Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ nach [Hov2, Theorem 4.9.] einfach charakterisiert werden:

Theorem 3.29. Wir nehmen an, dass \mathcal{D} auch fast endlich erzeugt (Def. 2.18) ist, sequentielle Colimites in \mathcal{D} endliche Produkte erhalten und Ω mit sequentiellen Colimites kommutiert. Dann gilt für $A \in Sp(\mathcal{D}, T)$, dass die Abbildung $A \rightarrow \Theta^\infty JA$ eine stabile Äquivalenz in ein Ω -Spektrum ist (siehe Def. 3.9 und 3.20).

Außerdem sind für jede Abbildung f in $Sp(\mathcal{D}, T)$ äquivalent:

- f ist eine stabile Äquivalenz (siehe Def. 3.21).
- Für jede levelweise fasernde Ersetzung ([Hi, Def. 8.1.22]) f' von f gilt, dass $\Theta^\infty f'$ eine Level-Äquivalenz ist.
- Es gibt eine levelweise fasernde Ersetzung f' von f , so dass $\Theta^\infty f'$ eine Level-Äquivalenz ist.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von [Hov2, Theorem 4.9.] mit $G = - \wedge K$ und $U = \Omega$. Bei der letzten Aussage gilt zunächst nur, dass f eine stabile Äquivalenz ist, wenn $\Theta^\infty Jf$ eine Level-Äquivalenz ist. Der Funktor $\Theta^\infty : Sp(\mathcal{D}, T) \rightarrow \mathcal{D}$ schickt nach Lemma 2.19 (v) levelweise triviale Faserungen zwischen levelweise fasernden Objekten auf schwache Äquivalenzen. Damit sind die Voraussetzungen von [Hi, Proposition 8.1.24.] erfüllt, welche unmittelbar impliziert, dass genau dann $\Theta^\infty f'$ eine Level-Äquivalenz ist, wenn $\Theta^\infty Jf$ es ist. \square

Falls die obige Charakterisierung gilt, erhalten wir:

Proposition 3.30. *Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine symmetrisch monoidale Modellkategorie und T ein cofaserndes Objekt in \mathcal{D} . Die levelweise projektive Modellstruktur auf $Sp(\mathcal{D}, T)$ möge existieren.*

Außerdem möge für jede Abbildung f in $Sp(\mathcal{D}, T)$ äquivalent sein:

- f ist eine stabile Äquivalenz (siehe Def. 3.21).
- Für jede levelweise fasernde Ersetzung ([Hi, Def. 8.1.22]) f' von f gilt, dass $\Theta^\infty f'$ eine Level-Äquivalenz ist.
- Es gibt eine levelweise fasernde Ersetzung f' von f , so dass $\Theta^\infty f'$ eine Level-Äquivalenz ist.

Dies gilt also insbesondere, wenn die Voraussetzungen von Theorem 3.29 erfüllt sind.

Dann erhält der Endofunktor R (Def. 3.8) für Abbildungen zwischen level-fasernden Objekten in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ die Eigenschaft, stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$ zu sein.

Beweis. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ zwischen level-fasernden Objekten, die in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz ist. Dann ist nach Voraussetzung $\Theta^\infty f$ eine Level-Äquivalenz. Wegen Lemma 5.6 ist: $(\Theta^\infty Rf)_l \cong (\Theta^\infty f)_l$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $\Theta^\infty Rf$ eine Level-Äquivalenz und RX, RY sind level-fasernde Objekte (Ω erhält fasernde Objekte) und wiederum nach Voraussetzung Rf eine stabile Äquivalenz. \square

3.4.2 Das Beispiel $Sp(sSet_*, S^1)$

Definition 3.31 ([Sch08, S. 11 unten, Abschnitt 3.1]). *Ähnlich wie in [Sch08] definieren wir für $X \in Sp(Top_*, S^1)$ als auch für $X \in Sp(sSet_*, S^1)$ und $k \in \mathbb{Z}$ die k -te naive stabile Homotopiegruppe:*

$$\hat{\pi}_k X = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}, k+n \geq 2} (\dots \pi_{k+n} X_n \xrightarrow{\sigma_{n*}^X \cdot (-\wedge S^1)} \pi_{k+n+1} X_{n+1} \dots)$$

Sie sind offensichtlich funktoriell.

Bemerkung Diese Definition stimmt mit der in [Sch08] wegen Corollar 2.31 überein. Der Unterschied zur Definition in [Sch08] ist, dass wir hier nicht mehr die Realisierung des Spektrums $X \in Sp(sSet_*, S^1)$ betrachten.

Lemma 3.32. *Wir haben folgenden natürlichen Isomorphismus für $X \in Sp(sSet_*, S^1)$:*

$$\pi_l(\Theta^\infty JX)_k \cong \hat{\pi}_{l-k} X$$

Beweis. Wir können annehmen, dass X levelweise fasernd ist, denn Level-Äquivalenzen induzieren auf den naiven stabilen Homotopiegruppen Isomorphismen. Wir haben:

$$\begin{aligned} \pi_l[(\Theta^\infty X)_k] &= \pi_l(\operatorname{colim}(X_k \xrightarrow{\tilde{\sigma}_k^X} \Omega X_{k+1} \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{k+1}^X} \Omega^2 X_{k+2} \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{k+2}^X} \dots)) \\ &\cong \operatorname{colim}(\pi_l X_k \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{k*}^X} \pi_l \Omega X_{k+1} \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{k+1*}^X} \pi_l \Omega^2 X_{k+2} \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{k+2*}^X} \dots) \\ &\stackrel{(1)}{\cong} \end{aligned}$$

Der Isomorphismus (1) folgt aus Lemma 2.33. Der Rest folgt aus dem kommutativen Diagramm (siehe Lemma 2.32):

$$\begin{array}{ccc} \pi_l(\Omega^n X_{k+n}) & \xrightarrow{\Omega^n \tilde{\sigma}_{k+n*}^X} & \pi_l(\Omega^n \Omega X_{k+n+1}) \\ \cong \downarrow \alpha^n & & \cong \downarrow \alpha^n \\ \pi_{l+n} X_{k+n} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{k+n*}^X} & \pi_{l+n}(\Omega X_{k+n+1}) \\ \downarrow -\wedge S^1 & & \cong \downarrow \alpha \\ \pi_{l+n+1}(X_{k+n} \wedge S^1) & \xrightarrow{\sigma_{k+n*}^X} & \pi_{l+n+1} X_{k+n+1} \end{array}$$

\square

Corollar 3.33. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ in $Sp(sSet_*, S^1)$ ist genau dann eine stabile Äquivalenz (siehe Def. 3.21), wenn sie auf allen naiven Homotopiegruppen Isomorphismen $\hat{\pi}_k(f), k \in \mathbb{Z}$, induziert.

Beweis. Theorem 3.29 besagt, dass f genau dann eine stabile Äquivalenz ist, wenn $\Theta^\infty Jf$ eine Level-Äquivalenz. Da $(\Theta^\infty Z)_n = (\Omega \cdot \Theta^\infty Z)_{n+1}$ gilt und $\Theta^\infty Z$ levelweise fasernd ist (für levelweise faserndes $Z \in Sp(sSet_*, S^1)$), gilt nach Lemma 2.38, dass letzteres äquivalent dazu ist, dass für alle $l, k \geq 0$ $\pi_l([\Theta^\infty Jf]_k)$ Isomorphismen sind. Nach Lemma 3.32 ist die äquivalent dazu, dass alle $\hat{\pi}_k(f), k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen sind. \square

3.4.3 Das Beispiel $Sp(M^{cm}(S), \mathbb{P}^1)$

In diesem Abschnitt werden wir die beiden punktierten motivischen Räume \mathbb{P}^1 und \mathbb{G}_m benutzen (siehe Def. 2.60). Nach der folgenden Definition der motivischen stabilen Homotopiegruppen wird gezeigt, wie stabile Äquivalenzen durch diese beschrieben werden können (siehe Corollar. 3.43).

Definition 3.34 ([Ja2, S. 487]). Sei X ein \mathbb{P}^1 -Spektrum in $M.(S)$, $r \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{Z}$ und $U \in Sm/S$. Die motivischen stabilen Homotopiegruppen von X sind:

$$\pi_{r,q}^{mot}(X)(U) = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}, q+n \geq 1} (\cdots \rightarrow [S^r \wedge U_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge q+n}, X_n] \xrightarrow{\sigma_{n*}^{X \cdot (-\wedge \mathbb{P}^1)}} [S^r \wedge U_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge q+n+1}, X_{n+1}] \rightarrow \cdots)$$

Bemerkung Die Indizes stimmen bei dieser Definition der einfacheren Schreibweise wegen nicht mit den Indizes in [Ja2] überein. Um dies zu beheben, müsste man hier in $\pi_{r,q}^{mot}(X)(U)$ den Index r durch $r + q$ ersetzen.

Lemma-Definition 3.35. Sei A ein punktierter motivischer Raum. Dann faktorisiert die Abbildung $A \rightarrow *$ in $M.(S)$ über einen Monomorphismus $A \cong A \wedge S^0 \hookrightarrow A \wedge (\Delta^1, 0) =: C(A)$ gefolgt von einer motivisch schwachen Äquivalenz $A \wedge (\Delta^1, 0) \rightarrow A \wedge * = *$.

Beweis. Objektweise schwache Äquivalenzen sind motivische schwache Äquivalenzen. \square

Lemma 3.36 ([MV, Lemma 3.2.15]). In $M.(S)$ gibt es ein Zickzack von motivisch schwachen Äquivalenzen zwischen \mathbb{P}^1 und $S^1 \wedge \mathbb{G}_m$, so dass alle Objekte des Zickzacks abgeschlossen-flasque cofasernd sind.

Beweis. Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} h(\mathbb{A}_S^1) & \longleftarrow & h(\mathbb{G}_m S) & \longrightarrow & * \\ \uparrow 1 & & \uparrow 1 & & \uparrow \sim \\ h(\mathbb{A}_S^1) & \longleftarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & C(\mathbb{G}_m) \\ \downarrow \sim & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ * & \longleftarrow & h(\mathbb{G}_m S) & \longrightarrow & C(\mathbb{G}_m) \end{array}$$

Da $h(\mathbb{G}_m S) \hookrightarrow h(\mathbb{A}_S^1)$ und $h(\mathbb{G}_m S) \hookrightarrow C(\mathbb{G}_m)$ Monomorphismen sind, folgt aus der Linkseigentlichkeit der motivisch injektiven Modellstruktur (Thm. 2.40), dass die induzierten Abbildung auf Pushouts motivisch schwache Äquivalenzen sind. Ein Basispunkt für den mittleren Pushout wird durch den Basispunkt von \mathbb{G}_m induziert. Da die Basispunkte vom oberen und unteren Pushout die Inklusion von $*$ sind, sind diese motivisch schwachen Äquivalenzen auch punktiert.

Der Pushout von $* \longleftarrow h(\mathbb{G}_m S) \longrightarrow C(\mathbb{G}_m)$ ist nach Definition $\mathbb{G}_m \wedge S^1$. Dies ist nach Konstruktion ein abgeschlossen-flasque cofasernden punktierter motivischer Raum. Das restliche Zickzack wird in Lemma 2.63 konstruiert.

Wir können auf das Zickzack einen cofasernden Ersetzungsfunktor für die motivisch abgeschlossen-flasque Modellstruktur anwenden. Dies zeigt die letzte Aussage. \square

Corollar 3.37. Sei X ein \mathbb{P}^1 -Spektrum, $r \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{Z}$ und $U \in Sm/S$. Die motivischen stabilen Homotopiegruppen $\pi_{r,q}^{mot}(X)(U)$ von X sind isomorph zu:

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}, q+n \geq 1} (\cdots \rightarrow [U_+ \wedge S^{r+q+n} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge q+n}, X_n] \xrightarrow{\sigma_{n*}^{X \cdot P^* \cdot (-\wedge \mathbb{P}^1)}} [U_+ \wedge S^{r+q+n+1} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge q+n+1}, X_{n+1}] \rightarrow \cdots)$$

wobei P der Isomorphismus ist, der \mathbb{P}^1 durch $S^1 \wedge \mathbb{G}_m$ ersetzt und die Smash-Faktoren permutiert:
 $S^{r+q+n} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge q+n} \wedge \mathbb{P}^1 \cong S^{r+q+n} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge q+n} \wedge S^1 \wedge \mathbb{G}_m \cong S^{r+q+n+1} \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge q+n+1}$.

Insbesondere lassen sich die motivischen stabilen Homotopiegruppen $\pi_{r,q}^{mot}(X)(U)$ dadurch für alle $(r, q) \in \mathbb{Z}^2$ definieren.

Andererseits können wir auch

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}, q+n \geq 1} (\cdots \rightarrow [U_+ \wedge S^r \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge s} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge q+n}, X_n] \xrightarrow{\sigma_{n*}^X \cdot (-\wedge \mathbb{P}^1)} [U_+ \wedge S^r \wedge (\mathbb{G}_m)^{\wedge s} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge q+n+1}, X_{n+1}] \rightarrow \cdots)$$

für $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{Z}$ betrachten. Dies ist isomorph zu $\pi_{r-s, q+s}^{mot}(X)(U)$.

Corollar 3.38. Sei A ein motivisch abgeschlossen-flasque fasernder punktierter motivischer Raum und $U \in Sm/S$. Dann gibt es ein Zickzack von schwachen Äquivalenzen in $sSet_*$ zwischen $(\Omega_{\mathbb{P}^1} A)(U)$ und $\Omega_{S^1}[(\Omega_{\mathbb{G}_m} A)(U)]$. Außerdem ist $\Omega_{S^1}[Hom(\mathbb{G}_m, A)(U)]$ fasernd.

Beweis. Wegen Lemma 3.36 und da die motivisch abgeschlossen-flasque Modellstruktur monoidal ist (Thm. 2.47) gilt, dass es ein Zickzack von schwachen Äquivalenzen in $sSet_*$ zwischen $Hom(\mathbb{P}^1, A)(U)$ und $Hom(\mathbb{G}_m \wedge S^1, A)(U)$ gibt. Nach den Adjunktionen gilt:

$$\begin{aligned} Hom(S^1 \wedge \mathbb{G}_m, A)(U) &\cong Hom(S^1, Hom(\mathbb{G}_m, A))(U) \cong Map_{M.(S)}(S^1 \wedge U_+, Hom(\mathbb{G}_m, A)) \\ &\cong Map_{sSet_*}(S^1, Hom(\mathbb{G}_m, A)(U)) = \Omega_{S^1}[Hom(\mathbb{G}_m, A)(U)]. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.39. Sei A ein motivisch abgeschlossen-flasque fasernder punktierter motivischer Raum und $U \in Sm/S$. Dann sind natürlich isomorph: $\pi_r(A(U)) \cong [S^r \wedge U_+, A]$.

Beweis. Da in der motivisch abgeschlossen-flasquen Modellstruktur auf $M.(S)$ das Objekt $S^r \wedge U_+$ cofasernd ist, gilt:

$$[S^r \wedge U_+, A] \cong M.(S)(S^r \wedge U_+, A) / \sim \cong sSet_*(S^r, A(U)) / \sim \cong \pi_r(A(U)).$$

Dabei bezeichnet \sim die Homotopierelation. □

Lemma 3.40. Sei A ein motivisch abgeschlossen-flasque levelweise faserndes \mathbb{P}^1 -Spektrum und B ein abgeschlossen-flasque cofasernder Hom-endlicher motivischer Raum. Dann gilt für alle $r, n \in \mathbb{N}_0$ (natürlich in A und U):

$$\pi_r(Hom(B, \Theta^\infty A_n)(U)) \cong \text{colim}_{m \geq 0} [S^r \wedge B \wedge U_+ \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge m}, A_{n+m}].$$

Insbesondere ist $\pi_r(\Theta^\infty(A)_n(U)) \cong \pi_{r,-n}^{mot}(A)(U)$.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $V_0 := S^r \wedge U_+, V := V_0 \wedge B$. Wir haben:

$$\begin{aligned} \pi_r[Hom(B, (\Theta^\infty A)_n)(U)] &\stackrel{(0)}{\cong} \pi_r(\text{colim}(Hom(B, A_n)(U) \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{n*}^A} Hom(B, \Omega A_{n+1})(U) \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1*}^A} \\ Hom(B, \Omega^2 A_{n+2})(U) \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{n+2*}^A} \dots)) &\stackrel{(1)}{\cong} \text{colim}(\pi_r Hom(B, A_n)(U) \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^A(U)_*} \pi_r(Hom(B, \Omega A_{n+1})(U)) \\ \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1}^A(U)_*} \pi_r(Hom(B, \Omega^2 A_{n+2})(U) \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{n+2}^A(U)_*} \dots)) &\stackrel{(2)}{\cong} \text{colim}([V_0, Hom(B, A_n)] \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{n*}^A} [V_0, Hom(B, \Omega A_{n+1})] \\ \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1*}^A} [V_0, Hom(B, \Omega^2 A_{n+2})] \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{n+2*}^A} \dots) &\cong \text{colim}([V, A_n] \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{n*}^A} [V, \Omega A_{n+1}] \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1*}^A} [V, \Omega^2 A_{n+2}] \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{n+2*}^A} \\ \dots) \end{aligned}$$

Der Isomorphismus (0) folgt daraus, dass B Hom-endlich ist, und der Isomorphismus (1) folgt aus Lemma 2.33. Der Isomorphismus (2) folgt aus Lemma 3.39. Der Rest folgt aus dem kommutativen Diagramm (siehe Lemma 2.8):

$$\begin{array}{ccc} [V, \Omega^m A_{n+m}] & \xrightarrow{\Omega^m \tilde{\sigma}_{n+m*}^A} & [V, \Omega^{m+1} A_{n+m+1}] \\ \cong \downarrow \alpha^m & & \cong \downarrow \alpha^m \\ [V \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge m}, A_{n+m}] & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_{n+m*}^A} & [V \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge m}, \Omega A_{n+m+1}] \\ \downarrow -\wedge \mathbb{P}^1 & & \cong \downarrow \alpha \\ [V \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge m} \wedge \mathbb{P}^1, A_{n+m} \wedge \mathbb{P}^1] & \xrightarrow{\sigma_{n+m*}^A} & [V \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge m} \wedge \mathbb{P}^1, A_{n+m+1}] \end{array}$$

□

Lemma 3.41. Die Räume \mathbb{G}_m und \mathbb{P}^1 sind Hom-endlich sowie deren Smash-Produkte.

Beweis. Beide Räume, \mathbb{G}_m und \mathbb{P}^1 , sind Quotienten von Räumen der Form $h.(X)$, $X \in Sm/S$. Nach [DRØ, Lemma 2.5] sind sie Hom-endlich. Die Aussage über die Smash-Produkte folgt aus Lemma 2.9. \square

Corollar 3.42. *Ist $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung von abgeschlossen-flasque levelfasernden \mathbb{P}^1 -Spektren. Dann ist f eine stabile Äquivalenz (siehe Def. 3.21) genau dann, wenn $\pi_r(\Theta^\infty(f)_n(U))$ Isomorphismen für alle $r \geq 0, n \geq 0, U \in Sm/S$ sind.*

Beweis. Wegen Theorem 3.29 und Lemma 2.49 ist die Abbildung f genau dann eine stabile schwache Äquivalenz, wenn $\Theta^\infty(f)_n$ für alle $n \geq 0$ motivisch schwache Äquivalenzen sind. Da $\Theta^\infty(E)_n$ und $\Theta^\infty(F)_n$ motivisch abgeschlossen-flasque fasernd sind, ist $\Theta^\infty(f)_n$ eine motivisch schwache Äquivalenz, genau dann wenn es eine objektweise schwache Äquivalenz ist, denn die motivisch abgeschlossen-flasque Modellstruktur (Abschnitt 2.4) ist eine linke Bousfield-Lokalisierung der levelweise abgeschlossen-flasquen Modellstruktur ([Hi, Theorem 3.2.13]).

Nun gilt $\Theta^\infty(f)_n(U) \cong [\Omega_{\mathbb{P}^1} \Theta^\infty(f)_{n+1}](U)$ (siehe Lemma 3.41 $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ kommutiert mit sequentielle Colimites) und $[\Omega_{\mathbb{P}^1} \Theta^\infty(f)_{n+1}](U) \simeq \Omega_{S^1}[Hom(\mathbb{G}_m, \Theta^\infty(f)_{n+1}(U))]$ nach Lemma 3.38. Außerdem ist $Hom(\mathbb{G}_m, \Theta^\infty(f)_{n+1}(U))$ fasernd. Nach Lemma 2.38 folgt dann, dass die Abbildung $\Theta^\infty(f)_n(U)$ genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn $\pi_r(\Theta^\infty(f)_n(U))$ für alle $r \geq 0$ Isomorphismen sind. \square

Corollar 3.43. *Ist $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung von \mathbb{P}^1 -Spektren. Dann sind äquivalent:*

- (i) f ist eine stabile Äquivalenz (Def. 3.21)
- (ii) Für alle $r, n \in \mathbb{N}_0, U \in Sm/S$ sind $\pi_{r,-n}^{mot}(f)(U)$ Isomorphismen.
- (iii) Für alle $p, q \in \mathbb{Z}, U \in Sm/S$ sind $\pi_{p,q}^{mot}(f)(U)$ Isomorphismen.

Beweis. • (i) \Leftrightarrow (ii) Die Abbildung f ist genau dann eine stabile Äquivalenz, wenn Jf eine stabile Äquivalenz ist (1 $\rightarrow J$ ist eine Level-Äquivalenz), und dies wiederum nach Corollar 3.42 und Lemma 3.40 genau dann, wenn $\pi_{r,-n}^{mot}(f)(U)$ für alle $r, n \in \mathbb{N}_0, U \in Sm/S$ Isomorphismen sind.

- (i) \Rightarrow (iii) Da f eine stabile Äquivalenz ist, sind nach Theorem 3.29 $\Theta^\infty(Jf)_n$ für alle $n \geq 0$ motivisch schwache Äquivalenzen. Da $B := \mathbb{G}_m^s \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge t}$ für alle $s, t \geq 0$ abgeschlossen-flasque cofasernd und Hom-endlich ist (siehe Lemma 3.41), ist auch $Hom(B, \Theta^\infty(Jf)_n)$ eine motivisch schwache Äquivalenz zwischen motivisch abgeschlossen-flasque cofasernden Objekten. Damit sind $Hom(B, \Theta^\infty(Jf)_n)(U)$ für alle $U \in Sm/S$ schwache Äquivalenzen und somit nach Lemma 3.40 $\pi_{r-s,t-n+s}^{mot}(Jf)(U) \cong \pi_{r-s,t-n+s}^{mot}(f)(U)$ Isomorphismen.

- (iii) \Rightarrow (ii) Klar. \square

3.4.4 Verallgemeinerung der stabilen Homotopiegruppen

Wir können die stabilen Homotopiegruppen aus beiden Beispielen verallgemeinern. Um den Zusammenhang zu stabilen Äquivalenzen beizubehalten, werden wir jedoch später annehmen, dass die stabilen Homotopiegruppe die stabilen Äquivalenzen charakterisieren.

Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine punktierte symmetrisch monoidale Modellkategorie. Es gebe einen monoidalen linken Quillen-Funktor ([Hov1, Def. 4.2.16]) $i : sSet_* \hookrightarrow \mathcal{D}$. Der Rechtsadjungierte zu i sei $j : \mathcal{D} \rightarrow sSet_*$. Wir wählen ein cofaserndes Objekt T in \mathcal{D} , sodass $-\wedge T$ schwache Äquivalenzen erhält. Wir nehmen außerdem an, dass T ein Cogruppen-Objekt in $Ho(\mathcal{D})$ ist (siehe Lemma 2.13). Sei \mathcal{B} eine Klasse von cofasernden Objekten in \mathcal{D} .

Bemerkung • Für die Kategorie $M.(S)$ (Abschnitt 2.4) wird i der Funktor, der eine simpliziale Menge auf den konstanten Funktor schickt, und j die Auswertung am terminalen Objekt $S \in Sm/S$ sein.

- Dass T cofasernd ist, ist äquivalent dazu, dass der Funktor $-\wedge T$ Cofaserungen erhält, denn dann ist auch $i(S^0) \wedge T \cong S^0 \wedge T \cong T$ cofasernd.
- Per Definition ([Hi, Def. 8.3.2]) setzt sich der Funktor $-\wedge T$ setzt sich auf die Homotopiekategorie von \mathcal{D} fort.

Definition 3.44. Sei E ein T -Spektrum in \mathcal{D} . Dann heißen für $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$ die folgenden abelschen Gruppen (siehe Lemma 3.45)

$$\operatorname{colim}_{m \geq 0, q+m \geq 1} (\cdots \rightarrow [V \wedge T^{q+m}, E_m] \xrightarrow{\sigma_*(-\wedge T)} [V \wedge T^{q+m+1}, E_{m+1}] \rightarrow \cdots)$$

die stabilen Homotopiegruppen von E , und werden mit $\pi_q(E)(V)$ bzw. $\pi_q^V(E)$ bezeichnet. Diese sind Funktoren $Sp(\mathcal{D}, T) \rightarrow \text{Ab}$.

Beispiel • Für $\mathcal{D} = sSet_*, T = S^1$ und $\mathcal{B} = \{S^0\}$ gibt die Definition die stabilen Homotopiegruppen aus 3.31 wieder: $\pi_q^{S^0}(E) \cong \hat{\pi}_q(E)$.

- Für $\mathcal{D} = M^{cm}(S), T = \mathbb{P}^1$ und $\mathcal{B} = \{S^r \wedge h.(U) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge s} | r, s \in \mathbb{N}_0, U \in Sm/S\}$ ergeben die Mengen $\pi_q^V(E)$ aus der Definition die motivisch stabilen Homotopiegruppen von E : $\pi_q^{S^r \wedge h.(U) \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge s}}(E) \cong \pi_{r-s, q+s}^{mot}(E)(U)$ (siehe Corollar 3.37). Beachte, dass \mathcal{B} aus abgeschlossen-flasque cofasernden Objekten besteht.

Lemma 3.45. Seien A und X zwei Objekte in \mathcal{D} , so dass A cofasernd ist, und $V \in \mathcal{B}$. Dann hat $V \wedge T^2 \wedge A$ eine abelsche Cogruppenstruktur und die entsprechende Gruppenstruktur auf $[V \wedge T^2 \wedge A, X]$ ist mit $-\wedge T$ verträglich.

Beweis. Nach Voraussetzung ist T ein Cogruppen-Objekt. Nach Corollar 2.15 ist T^2 ein abelsches Cogruppen-Objekt mit Comultiplikation $T \wedge T \xrightarrow{\mu \wedge T} (T \vee T) \wedge T \cong (T \wedge T) \vee (T \wedge T)$ und entsprechend ist dies (nach Lemma 2.13) auch $A' := V \wedge T^2 \wedge A$ mit Comultiplikation $V \wedge T^2 \wedge A \xrightarrow{V \wedge \mu \wedge T \wedge A} V \wedge (T \vee T) \wedge T \wedge A \cong [V \wedge T \wedge T \wedge A] \wedge [V \wedge T \wedge T \wedge A]$. Da die Comultiplikation von $A' \wedge T$ durch $A' \wedge T \xrightarrow{\mu_{A'} \wedge T} (A' \vee A') \wedge T \cong (A' \wedge T) \vee (A' \wedge T)$ gegeben ist, folgt die Verträglichkeit mit $-\wedge T$. \square

Definition 3.46. Seien E und F zwei T -Spektren in \mathcal{D} und $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung von T -Spektren. Dann heißt f $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz, falls die induzierten Abbildungen

$$\pi_q^V(f) : \pi_q^V(E) \rightarrow \pi_q^V(F)$$

für alle $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$ Isomorphismen sind.

Lemma-Definition 3.47. Ein Vorzeichen $(-1)_T$ von T (siehe Def. 2.56) induziert einen Automorphismus der Ordnung 2 auf $\pi_q^V(E)$, der auch mit $(-1)_T$ benannt wird, nämlich durch:

$[V \wedge T^{q+m}, E_m] \xrightarrow{(V \wedge (-1)_T \wedge T^{q+m-1})^*} [V \wedge T^{q+m}, E_m]$, was offensichtlich mit den Stabilisierungsabbildungen verträglich. Dieser ist auch mit der Gruppenstruktur verträglich.

Beweis. Die Verträglichkeit mit der Gruppenstruktur folgt daraus, dass wir annehmen können, dass $q+m \geq 2$ ist und dann $V \wedge (-1)_T \wedge T^{q+m-1} = V \wedge T \wedge (-1)_T \wedge T^{q+m-2}$ nach Def. 2.56 ist. \square

Zum Schluss sehen wir noch, dass insbesondere für fast endlich erzeugte Modellkategorien \mathcal{D} die stabilen Homotopiegruppen mit sequentiellen Colimites vertauschen (siehe Lemma 2.19).

Lemma 3.48. Falls der Funktor j sequentielle Colimites erhält und $K \in sSet_*$ endlich dargestellt ist (z. B. endlich ist), so ist $i(K)$ in \mathcal{D} auch endlich dargestellt.

Beweis. Nach Adjunktion ist $\mathcal{D}(i(K), -) \cong sSet_*(K, -) \cdot j$. Da $sSet_*(K, -)$ und j sequentielle Colimites erhalten, gilt nach Lemma 2.9, dass auch $\mathcal{D}(i(K), -)$ sequentielle Colimites erhält. \square

Corollar 3.49. Es gelten:

- Fasernde Objekte in \mathcal{D} seien abgeschlossen unter sequentiellen Colimites.
- Die Funktoren $j, \text{Hom}(T, -)$ und $\text{Hom}(A, -)$ für alle $A \in \mathcal{B}$ erhalten sequentielle Colimites.

Dann ist für jedes sequentielle Diagramm X^\bullet in $Sp(\mathcal{D}, T)$ die Abbildung

$$\operatorname{colim}_{n \geq 0} \pi_q^V(X^n) \xrightarrow{\text{incl}_*} \pi_q^V(\operatorname{colim} X^\bullet)$$

für alle $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Für alle $m \in \mathbb{N}_0, q + m \geq 1$ ist die Abbildung

$$\operatorname{colim}_{n \geq 0} [V \wedge T^{q+m}, X_m^n] \xrightarrow{\operatorname{incl}_*} [V \wedge T^{q+m}, \operatorname{colim}_{n \geq 0} X_m^n]$$

nach Lemma 2.10 ($M = \mathcal{D}, A := V \wedge T^{q+m}$) ein Isomorphismus, denn nach Voraussetzung sind V, T und somit A cofasernd und A sowie $A \wedge \Delta_+^1$ sind endlich dargestellt. Denn nach Voraussetzung sind V und T *Hom*-endlich dargestellt und nach Lemma 2.9 auch $V \wedge T^{q+m}$. Schließlich sind mit Lemma 3.48 auch A und $A \wedge \Delta_+^1$ endlich dargestellt.

Da das Bilden von sequentiellen Colimites Isomorphismen erhalten und Colimites mit Colimites vertauschen, folgt schließlich die Behauptung. \square

4 Allgemeines über die \mathcal{M} -Wirkung

In diesem Kapitel wollen wir allgemeine Aussagen über die \mathcal{M} -Wirkung kurz zusammenfassen.

Definition 4.1. • Sei \mathcal{M} die Menge aller injektiven Selbstabbildungen von \mathbb{N} . Mit der Komposition ist \mathcal{M} ein Monoid, der sogenannte Injektionsmonoid.

- Die injektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x + 1$ wird mit d bezeichnet und heißt Zykeloperator (siehe [Sch09, Ch. I, Example 6.4]).
- Wir können \mathcal{M} als Kategorie mit einem Objekt $*$ und $\operatorname{Mor}(*, *) = \mathcal{M}$ ansehen. Ein \mathcal{M} -Objekt W einer Kategorie \mathcal{D} ist ein Funktor $W : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$. Man sagt auch: das zugrundeliegende Objekt $W(*)$ habe eine \mathcal{M} -Wirkung. Die Funktorkategorie $\operatorname{Func}(\mathcal{M}, \mathcal{D})$ heißt dann die Kategorie der \mathcal{M} -Objekte. Die \mathcal{M} -Wirkung von $W(*)$ heißt *trivial*, falls alle Morphismen in \mathcal{M} durch W auf die Identität geschickt werden. Eine \mathcal{M} -Objekt in der Kategorie der abelschen Gruppen bzw. Mengen heißt auch \mathcal{M} -Modul bzw. \mathcal{M} -Menge.
- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die injektive Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, die f auf die Abbildung $x \mapsto \begin{cases} x & x \leq n \\ f(x - n) & x > n \end{cases}$ wird mit $n + -$ und $-(n)$ bezeichnet. Falls W ein \mathcal{M} -Objekt ist, so ist $W(n)$ das \mathcal{M} -Objekt mit unterliegendem Objekt W und der entlang $n + -$ eingeschränkten \mathcal{M} -Wirkung.
- Sei nun \mathcal{D} eine Kategorie mit einem treuen Funktor (Vergissfunktor) in die Kategorie der Mengen, d.h. eine konkrete Kategorie, z. B. die Kategorie der abelschen Gruppen, so dass man von Elementen sprechen kann. Sei ϕ eine \mathcal{M} -Wirkung eines Objekts W in \mathcal{D} . Man schreibt dann auch fx für $[\phi(f)](x)$, wenn die \mathcal{M} -Wirkung klar ist.
Für ein $f \in \mathcal{M}$ sei $|f| := \min\{i \geq 0; f(i+1) \neq i+1\}$. Ein Element $x \in W$ hat Filtrierung n , falls für alle $f \in \mathcal{M}$ mit $|f| \geq n$ $fx = x$ gilt. Wir bezeichnen mit $W^{(n)}$ die Teilmenge aller Elemente mit Filtrierung n . Ein Element x hat genau Filtrierung n , falls $x \in W^{(n)} - W^{(n-1)}$. Die \mathcal{M} -Wirkung auf W heißt *zahm*, falls $W = \bigcup_{n \geq 0} W^{(n)}$.
Falls \mathcal{D} die Kategorie der abelschen Gruppen oder Monoide ist, so erben $W^{(n)}, n \geq 0$ auch diese algebraische Struktur.

Die grundlegenden Aussagen für \mathcal{M} -Objekte befinden sich in den folgenden beiden Lemmata:

Lemma 4.2 ([Sch09, Ch. I, Lemma 6.5]). Sei W ein \mathcal{M} -Modul.

- (i) Wenn $f, g \in \mathcal{M}$ auf $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ übereinstimmen, dann gilt $fx = gx$ für alle $x \in W$ mit Filtrierung n .
- (ii) Für $n \geq 0$ und $f \in \mathcal{M}$ sei $m = \max\{|f|, n\}$. Dann ist $f \cdot W^{(n)} \subseteq W^{(m)}$.
- (iii) Wenn $x \in W$ genau Filtrierung n mit $n \geq 1$ hat, dann hat dx genau Filtrierung $n + 1$.
- (iv) Jeder Homomorphismus von dem Injektionsmonoiden \mathcal{M} in eine Gruppe ist *trivial*.
- (v) Sei $V \subseteq W$ ein \mathcal{M} -Untermodul, so dass \mathcal{M} auf V und W/V *trivial* operiert. Dann ist die Wirkung von \mathcal{M} auf W auch *trivial*.

Lemma 4.3 ([Sch09, Ch. I, Lemma 6.6]). Sei W ein *zahmes* \mathcal{M} -Modul.

- (i) Jedes Element von \mathcal{M} wirkt auf W *injektiv*.

(ii) Wenn die Filtrierung der Elemente von W beschränkt ist, dann ist W ein triviales \mathcal{M} -Modul.

(iii) Wenn die Abbildung $d \in \mathcal{M}$ surjektiv auf W operiert, dann ist W ein triviales \mathcal{M} -Modul.

(iv) Wenn W endlich erzeugt als abelsche Gruppe ist, dann ist W ein triviale \mathcal{M} -Modul.

Bemerkung Die Punkte (i), (ii) und (iii) in Lemma 4.2 und Lemma 4.3 gelten auch für \mathcal{M} -Mengen, denn die Beweise davon benutzen nicht die Gruppenstruktur. Den Beweis von Lemma 4.3 (i) kann man entsprechend abändern: falls $f \in \mathcal{M}, x \in W^{(n)}$ mit $fx = fx'$, so kann man da f injektiv ist, ein $h \in \mathcal{M}$ wählen mit $|hf| \geq n$ und nach Lemma 4.2 (i) gilt: $x = (hf)x = h(fx) = h(fx') = (hf)x' = x'$. Entsprechend gelten diese Punkte dann auch in jeder konkreten Kategorie, da alles auf die unterliegenden Mengen zurückgeführt werden kann.

Es geht nun darum, wie symmetrische Spektren Funktoren der Form $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ induzieren, und diese wiederum zahme \mathcal{M} -Objekte.

Definition 4.4 ([Sch08M, 1.2]). Die Kategorie \mathcal{I} habe als Objekte die Menge \mathbb{N}_0 der natürlichen Zahlen gesehen als Ordinalzahlen beginnend mit $\mathbf{0} = \emptyset$ und als Morphismen alle injektiven Abbildungen zwischen ihnen. Insbesondere sind Mengeninklusionen von Ordinalzahlen auch Morphismen. Sie heißt Injektionskategorie. Funktoren mit Quellkategorie \mathcal{I} werden auch \mathcal{I} -Funktoren genannt.

Lemma 4.5. Sei \mathcal{D} eine Kategorie mit sequentiellen Colimites und $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann gibt es eine funktorielle Konstruktion, welche dem Funktor F ein \mathcal{M} -Objekt in \mathcal{D} (mit unterliegendem Objekt)

$$F(\omega) := \operatorname{colim}(F(\mathbf{1}) \xrightarrow{F(1 \subset 2)} F(\mathbf{2}) \xrightarrow{F(2 \subset 3)} F(\mathbf{3}) \xrightarrow{F(3 \subset 4)} \dots)$$

zuordnet. Diese Zuordnung ist Teil eines Funktors von $\operatorname{Func}(\mathcal{I}, \mathcal{D})$ in die Kategorie der \mathcal{M} -Objekte in \mathcal{D} .

Bemerkung Die Notation im Beweis deutet an, dass wir den Funktor F entlang der Inklusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_\omega$ erweitern, wobei die Kategorie \mathcal{I}_ω durch Hinzunahme eines Objektes ω zu der Kategorie \mathcal{I} entsteht. Dabei ist $\operatorname{Mor}(n, \omega)$ die Menge aller injektiven Mengen-Abbildung von n nach \mathbb{N} und $\operatorname{Mor}(\omega, \omega) = \mathcal{M}$. In der Tat handelt es sich hierbei um eine linke Kan-Erweiterung. Siehe [Sch08M, S. 1318 Mitte].

Beweis. 1. Zunächst haben wir die Funktorkomposition:

$$\operatorname{Func}(\mathcal{I}, \mathcal{D}) \xrightarrow{res} \operatorname{Func}(\operatorname{Poset}(\mathbb{N}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\operatorname{colim}} \mathcal{D}$$

welche dem unterliegenden Objekt entspricht, wobei res die Restriktion entlang der Inklusion $\operatorname{Poset}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{I}$ ist. Dabei ist $\operatorname{Poset}(\mathbb{N})$ die Unterkategorie, die dieselben Objekte, aber nur die Inklusionen $\mathbf{n} \subset \mathbf{n}', n \geq 1$ enthält.

2. Sei f eine injektive Selbstabbildung f von \mathbb{N} und $n \geq 1$. Dann sei $m = \max f(\mathbf{n})$. f lässt sich zu einer Abbildung $f' : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ einschränken. Wir erhalten eine Abbildung

$$F(f|_{\mathbf{n}}) : F(\mathbf{n}) \xrightarrow{F(f')} F(\mathbf{m}) \xrightarrow{\operatorname{incl}_m^{F(\omega)}} F(\omega).$$

3. Zur Definition von $F(f|_{\mathbf{n}})$ genügt es, auch statt \mathbf{m} ein $\mathbf{m}' \in \mathcal{I}$ mit $m' \geq m$ zu wählen. Denn falls $\tilde{f}' : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}'$ die zugehörige Einschränkung von f ist, so gilt offenbar: $\tilde{f}' = (\mathbf{m} \subset \mathbf{m}') \cdot f'$ und damit auch: $\operatorname{incl}_m^{F(\omega)} \cdot F(f') = \operatorname{incl}_m^{F(\omega)} \cdot F((\mathbf{m} \subset \mathbf{m}')) \cdot F(f') = \operatorname{incl}_{m'}^{F(\omega)} \cdot F(\tilde{f}')$.

4. Die Abbildungen $\{F(f|_{\mathbf{n}}), n \geq 1\}$ sind kompatibel mit den Inklusionen $\operatorname{incl}_n : \mathbf{n} \subset \mathbf{n+1}$: sei $m_1 = \max f(\mathbf{n+1})$ und $m_0 = \max f(\mathbf{n})$. Dann gilt $\mathbf{m}_0 \subseteq \mathbf{m}_1$. Seien $f' : \mathbf{n+1} \rightarrow \mathbf{m}_1$ und $\tilde{f}' : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}_0$ die jeweiligen Einschränkungen von f , also gilt: $f' \cdot \operatorname{incl}_n = (\mathbf{m}_0 \subset \mathbf{m}_1) \cdot \tilde{f}'$. Dann gilt: $[\operatorname{incl}_{m_1}^{F(\omega)} \cdot F(f')] \cdot F(\operatorname{incl}_n) = \operatorname{incl}_{m_1}^{F(\omega)} \cdot F(\mathbf{m}_0 \subset \mathbf{m}_1) \cdot F(\tilde{f}')$
 $= \operatorname{incl}_{m_0}^{F(\omega)} \cdot F(\tilde{f}')$ wegen der Funktorialität von F , also $F(f|_{\mathbf{n+1}}) \cdot F(\operatorname{incl}_n) = F(f|_{\mathbf{n}})$. Wir erhalten aus diesen eine Abbildung $F(f) : F(\omega) \rightarrow F(\omega)$.

5. Falls $f = id$ ist, gilt $n = \max f(\mathbf{n})$ und die Einschränkung ist $id_{\mathbf{n}}$, weshalb $F(f|_{\mathbf{n}}) = \operatorname{incl}_n^{F(\omega)}$ und $F(id) = id_{F(\omega)}$.

Für $g, f \in \mathcal{M}$ sei $h = g \cdot f$. Seien $n \geq 1, m := \max f(\mathbf{n}), k := \max g(\mathbf{m})$ und $f' : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ und $g' : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}$ die jeweiligen Einschränkungen von f bzw. g . Die Komposition $g' \cdot f' : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{k}$ ist also eine Einschränkung von h . Es ist dann $[F(g) \cdot F(f)] \cdot \operatorname{incl}_n^{F(\omega)} = F(g) \cdot \operatorname{incl}_m^{F(\omega)} \cdot F(f') = \operatorname{incl}_k^{F(\omega)} \cdot F(g') \cdot F(f') = \operatorname{incl}_k^{F(\omega)} \cdot F(g' \cdot f')$
nach 3. $= F(h) \cdot \operatorname{incl}_n^{F(\omega)}$. Also ist $F(\omega)$ ein \mathcal{M} -Objekt.

6. Falls $\phi : F \rightarrow G$ eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ist, so gilt $[G(f) \cdot \phi(\omega)] \cdot \text{incl}_n^{F(\omega)} = G(f) \cdot \text{incl}_n^{G(\omega)} \cdot \phi(n) = \text{incl}_m^{G(\omega)} \cdot G(f') \cdot \phi(n) = \text{incl}_m^{G(\omega)} \cdot \phi(m) \cdot F(f') = \phi(\omega) \cdot \text{incl}_m^{F(\omega)} \cdot F(f') = [\phi(\omega) \cdot F(f)] \cdot \text{incl}_n^{F(\omega)}$, also $G(f) \cdot \phi(\omega) = \phi(\omega) \cdot F(f)$. Somit ist die obige Zuordnung ein Funktor in die Kategorie der \mathcal{M} -Objekte. \square

Lemma 4.6. Sei $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor in eine Kategorie \mathcal{D} , wie in Lemma 4.5, die konkret (Def. 4.1) ist.

1. Ist jedes Element von $F(\omega)$ schon im Bild unter einer der Inklusionsabbildungen $\text{incl}_m^{F(\omega)}$, so ist $F(\omega)$ zahm.
Dies gilt insbesondere, falls \mathcal{D} die Kategorie der Mengen oder abelschen Gruppen ist.
2. Es möge ein $l \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass die Inklusionsabbildung $F(\mathbf{1}) \rightarrow F(\omega)$ surjektiv ist. Dann ist die Filtrierung jedes Elementes von $F(\omega) \leq l$.

Beweis. In beiden Fällen genügt es zu zeigen, dass ein Element $x \in F(\omega)$, das von einem Element $y \in F(\mathbf{1})$ $x = \text{incl}_l^{F(\omega)}(y)$ herkommt, Filtrierung $\leq l$ hat. Sei dazu $f \in \mathcal{M}$ mit $|f| = l$. Nach Definition von $F(f)$ gilt: $F(f) \cdot \text{incl}_l^{F(\omega)} = F(f|_1) = \text{incl}_l^{F(\omega)} \cdot F(\mathbf{1}_1) = \text{incl}_l^{F(\omega)}$, denn f schränkt sich zu $\mathbf{1}_1$ ein. Zusammen ergibt sich: $F(f)(x) = x$. Also hat x Filtrierung $\leq l$. \square

Wir können zu jedem symmetrischen Spektrum X in \mathcal{D} einen Funktor $\underline{X} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ konstruieren:

Proposition-Definition 4.7 ([Sch07, Example 4.17, Seite 58]). Es gelten die Voraussetzungen von Abschnitt 3 über die Kategorie \mathcal{D} . Sei $X \in Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ein symmetrisches Spektrum. Dann gibt es eine funktorielle Konstruktion, welche X einen Funktor $\underline{X} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ zuordnet, so dass

$$\underline{X}(\omega) \cong (\Theta^\infty X)_0$$

gilt (siehe Lemma 4.5). Diese Identifikation macht $(\Theta^\infty X)_0$ zu einem \mathcal{M} -Objekt. Insbesondere, erhalten wir einen Funktor: $\underline{\quad}(\omega) : Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T) \rightarrow (\mathcal{M}\text{-Objekte in } \mathcal{D})$.

Beweis. 1. Setze $\underline{X}(\mathbf{n}) = \text{Hom}(T^n, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für eine injektive Abbildung $\alpha : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ wähle $\gamma \in \Sigma_m$ mit $\gamma|_{\mathbf{n}} = \alpha$. Definiere $\underline{X}(\alpha)$ als die Abbildung

$$\text{Hom}(T^n, X_n) \xrightarrow{\iota_n^{m-n, X}} \text{Hom}(T^m, X_m) \xrightarrow{\text{Hom}(\gamma_*^{-1}, \gamma_*)} \text{Hom}(T^m, X_m)$$

wobei $\iota_n^{m-n, X}$ die zu $\text{Hom}(T^n, X_n) \wedge T^m \xrightarrow{\text{ev} \wedge T^{m-n}} X_n \wedge T^{m-n} \xrightarrow{\sigma_n^{m-n, X}} X_m$ adjungierte Abbildung ist.

2. Diese Abbildung ist wohldefiniert: seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma_m$ mit $\gamma_1|_{\mathbf{n}} = \gamma_2|_{\mathbf{n}}$. Setze $\gamma := \gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1$. Somit ist $\gamma|_{\mathbf{n}} = 1_{\mathbf{n}}$. Also gibt es eine Zerlegung $\gamma = n + \tau$, wobei $\tau \in \Sigma_k, k = m - n$ ist. Wegen der Äquivarianz der Strukturabbildung kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(T^n, X_n) \wedge T^m & \xrightarrow{\text{ev} \wedge T^{m-n}} & X_n \wedge T^{m-n} & \xrightarrow{\sigma^{m-n}} & X_m \\ \downarrow 1 \wedge \gamma & & \downarrow 1 \wedge \tau & & \downarrow \gamma = n + \tau \\ \text{Hom}(T^n, X_n) \wedge T^m & \xrightarrow{\text{ev} \wedge T^{m-n}} & X_n \wedge T^{m-n} & \xrightarrow{\sigma^{m-n}} & X_m \end{array}$$

Per Adjunktion ergibt sich für die obige und untere Abbildung $\text{Hom}(T^m, \gamma) \cdot \iota_n^{m-n, X} = \text{Hom}(\gamma, X_m) \cdot \iota_n^{m-n, X}$ und damit, dass das linke Rechteck im folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}(T^n, X_n) & \xrightarrow{\iota_n^{m-n, X}} & \text{Hom}(T^m, X_m) & \xrightarrow{\text{Hom}(\gamma_1^{-1}, \gamma_1)} & \text{Hom}(T^m, X_m) \\ \parallel & & \downarrow \text{Hom}(\gamma^{-1}, \gamma) & & \parallel \\ \text{Hom}(T^n, X_n) & \xrightarrow{\iota_n^{m-n, X}} & \text{Hom}(T^m, X_m) & \xrightarrow{\text{Hom}(\gamma_2^{-1}, \gamma_2)} & \text{Hom}(T^m, X_m) \end{array}$$

Das rechte Rechteck kommutiert, da wegen der Funktorialität von $\text{Hom}(-, -)$ die Zuordnung $\Sigma_m \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(\text{Hom}(T^m, X^m)), \gamma \mapsto \text{Hom}(\gamma_*^{-1}, \gamma_*)$ ein Morphismus von Monoiden ist.

3. Falls $\alpha = 1_n$, so kann $\gamma = 1_n$ gewählt werden. Wegen $\iota_n^{0,X} = 1_{\text{Hom}(T^n, X_n)}$ ist dann $\underline{X}(\alpha) = 1_{\text{Hom}(T^n, X_n)}$.

Seien nun $\alpha_1 : \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{m}$ und $\alpha_2 : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{k}$ zwei injektive Abbildungen. Wir wählen zwei Permutationen $\gamma_1 \in \Sigma_m, \gamma_2 \in \Sigma_k$ mit $\gamma_{1|\mathbf{n}} = \alpha_1$ und $\gamma_{2|\mathbf{m}} = \alpha_2$. Sei $\gamma'_1 = \gamma_1 + (k-m) \in \Sigma_k$ und $\gamma := \gamma_2 \cdot \gamma'_1 \in \Sigma_k$.

Dann gilt $\alpha_2 \cdot \alpha_1 = \gamma|_{\mathbf{n}}$.

Es genügt dann zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}(T^n, X_n) & \xrightarrow{\iota_n^{m-n, X}} & \text{Hom}(T^m, X_m) & \xrightarrow{\text{Hom}(\gamma_1^{-1}, \gamma_1)} & \text{Hom}(T^m, X_m) \\
 & \searrow \iota_n^{k-n, X} & \downarrow \iota_m^{k-m, X} & & \downarrow \iota_m^{k-m, X} \\
 & & \text{Hom}(T^k, X_k) & \xrightarrow{\text{Hom}(\gamma_1'^{-1}, \gamma_1')} & \text{Hom}(T^k, X_k) \\
 & & & \searrow \text{Hom}(\gamma^{-1}, \gamma) & \downarrow \text{Hom}(\gamma_2^{-1}, \gamma_2) \\
 & & & & \text{Hom}(T^k, X_k)
 \end{array}$$

Das linke obere Dreieck kommutiert, wegen folgender Rechnung über die Adjungierten:

$$\begin{aligned}
 \text{ev} \cdot [(\iota_m^{k-m, X} \cdot \iota_n^{m-n, X}) \wedge T^k] &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot (\text{ev} \wedge T^{k-m}) \cdot (\iota_n^{m-n, X} \wedge T^k) \\
 &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot ([\text{ev} \cdot (\iota_n^{m-n, X} \wedge T^m)] \wedge T^{k-m}) \\
 &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot ([\sigma_n^{m-n, X} \cdot (\text{ev} \wedge T^{m-n})] \wedge T^{k-m}) = \sigma_n^{k-n, X} \cdot (\text{ev} \wedge T^{k-n}) \\
 &= \text{ev} \cdot (\iota_n^{k-n, X} \wedge T^k)
 \end{aligned}$$

Das rechte obere Rechteck kommutiert, weil die jeweiligen Adjungierten gleich sind:

$$\begin{aligned}
 \text{ev} \cdot [(\iota_m^{k-m, X} \cdot \text{Hom}(\gamma_1^{-1}, \gamma_1)) \wedge T^k] &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot (\text{ev} \wedge T^{k-m}) \cdot (\text{Hom}(\gamma_1^{-1}, \gamma_1) \wedge T^k) \\
 &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot ([\text{ev} \cdot (\text{Hom}(\gamma_1^{-1}, \gamma_1) \wedge T^m)] \wedge T^{k-m}) \\
 &= \sigma_m^{k-m, X} \cdot ([\gamma_1 \cdot \text{ev} \cdot (1 \wedge \gamma_1^{-1})] \wedge T^{k-m}) = \gamma_1' \cdot \sigma_m^{k-m, X} \cdot (\text{ev} \wedge T^{k-m}) \cdot (1 \wedge \gamma_1'^{-1}) \\
 &= \gamma_1' \cdot \text{ev} \cdot (\iota_m^{k-m, X} \wedge T^k) \cdot (1 \wedge \gamma_1'^{-1}) = (\gamma_1' \cdot \text{ev} \cdot [1 \wedge \gamma_1'^{-1}]) \cdot (\iota_m^{k-m, X} \wedge T^k) = \\
 &= \text{ev} \cdot (\text{Hom}(\gamma_1'^{-1}, \gamma_1') \wedge T^k) \cdot (\iota_m^{k-m, X} \wedge T^k) = \text{ev} \cdot ([\text{Hom}(\gamma_1'^{-1}, \gamma_1') \cdot \iota_m^{k-m, X}] \wedge T^k)
 \end{aligned}$$

4. Falls $\alpha : \mathbf{n} \subset \mathbf{n}+1$ die Inklusion ist, haben wir $1_{\mathbf{n}+1|\mathbf{n}} = \alpha$ und so $\underline{X}(\alpha) = \iota_n^{1,X}$. Aus dem Rechteck (siehe Lemma 3.3)

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^n X_n & \xrightarrow{\Omega^n \tilde{\sigma}_n^X} & \Omega^{n+1} X_{n+1} \\
 \delta_n \downarrow \cong & & \delta_{n+1} \downarrow \cong \\
 \text{Hom}(T^n, X_n) & \xrightarrow{\iota_n^{1,X}} & \text{Hom}(T^{n+1}, X_{n+1})
 \end{array}$$

was wegen:

$$\begin{aligned}
 \text{ev} \cdot [(\delta_{n+1} \cdot \Omega^n \tilde{\sigma}_n^X) \wedge T^{n+1}] &= \text{ev}_{X_{n+1}}^{n+1} \cdot (\Omega^n \tilde{\sigma}_n^X \wedge T^{n+1}) = \text{ev} \cdot (\text{ev}_{\Omega X_{n+1}}^n \wedge T) \cdot (\Omega^n \tilde{\sigma}_n^X \wedge T^{n+1}) = \\
 &= [\text{ev} \cdot (\tilde{\sigma}_n^X \wedge T)] \cdot (\text{ev}_{X_n}^n \wedge T) = \sigma_n^X \cdot ([\text{ev} \cdot (\delta_n \wedge T^n)] \wedge T) = [\text{ev} \cdot (\iota_n^{1,X} \wedge T^{n+1})] \cdot (\delta_n \wedge T^{n+1})
 \end{aligned}$$

kommutiert, folgt dann die letzte Behauptung: $\underline{X}(\omega) \cong (\Theta^\infty X)_0$. □

Bemerkung Seien $\mathcal{D} = s\text{Set}_*$, $T = S^1$ und X ein levelweise faserndes symmetrisches Spektrum in $\text{Sp}(s\text{Set}_*, S^1)$. Dann ist $\pi_k(\underline{X})$ für $k \geq 0$ ein \mathcal{I} -Funktors von Mengen (bzw. abelschen Gruppen für $k \geq 2$), der eine \mathcal{M} -Menge $\pi_k(\underline{X})(\omega)$ induziert. Wegen Lemma 2.33 ist diese \mathcal{M} -Menge zu $\pi_k(\underline{X})(\omega)$ isomorph. In Abschnitt 5.2 wird eine \mathcal{M} -Modulstruktur auf $\hat{\pi}_k X$ mittels eines \mathcal{I} -Funktors definiert, was der Definition aus [Sch07, Construction 4.12, S. 56] entspricht. In [Sch07, Construction 4.12, S. 56] wird gezeigt, dass dieser \mathcal{I} -Funktors zu dem \mathcal{I} -Funktors $\pi_k(\underline{X})$ isomorph ist. Dabei wird verwendet, dass ein Permutieren von Smash-Potenzen von S^1 äquivalent zu einem Vorzeichen ist (siehe Abschnitt 2.5.2). Damit sind die \mathcal{M} -Mengen $\pi_k(\underline{X})(\omega)$ und $\hat{\pi}_k X$ isomorph.

Die nächste Aussage beschreibt die allgemeinen Eigenschaften der Konstruktion, die in [Sch08, Definition 4.29] auf die Funktoren $\hat{\pi}_k$ angewandt wird:

Proposition-Definition 4.8. *Sei \mathcal{D} eine Kategorie und \mathcal{F} ein Klasse von Funktoren F von \mathcal{D} in die Kategorie der \mathcal{M} -Mengen. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ die volle Unterkategorie von \mathcal{D} von Objekten X , für die für alle $F \in \mathcal{F}$ die \mathcal{M} -Wirkung auf $F(X)$ trivial ist.*

- (i) Wir betrachten für alle $X \in \mathcal{D}$, $F \in \mathcal{F}$ die Klassen $\tilde{F}(X)$ der natürlichen Transformationen von Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ vom Funktor $\mathcal{D}(X, -)$ zu dem Funktor F , und nehmen an, dass diese Mengen sind. Dann ist \tilde{F} von \mathcal{D} in die Kategorie der \mathcal{M} -Mengen.
- (ii) \mathcal{M} operiert trivial auf $\tilde{F}(X)$.
- (iii) Es gibt eine natürliche Abbildung $c_X : F(X) \rightarrow \tilde{F}(X)$ von \mathcal{M} -Mengen.
- (iv) Ein Objekt X von \mathcal{D} ist genau dann in \mathcal{C} , wenn $c_X : F(X) \rightarrow \tilde{F}(X)$ für alle $F \in \mathcal{F}$ bijektiv ist. Dafür genügt auch schon die Injektivität.

Beweis. (i) Sei $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung in \mathcal{D} , $g \in \tilde{F}(X_1)$ und $k : X_2 \rightarrow Y$ eine Abbildung in \mathcal{D} zu einem Objekt Y in \mathcal{C} . Die natürliche Transformation g ordnet der Komposition kf ein Element $g'_Y(k) := g_Y(kf) \in F(Y)$ zu. Wegen der Natürlichkeit von g folgt, dass die Zuordnung $k \mapsto g'_Y(k)$ auch natürlich in Y ist. Also erhalten wir eine Abbildung $\tilde{F}(f) : \tilde{F}(X_1) \rightarrow \tilde{F}(X_2)$, $g \mapsto g'$. Falls $f' : X_2 \rightarrow X_3$ eine weitere Abbildung ist, dann gilt für $k : X_3 \rightarrow Y$ mit Y in \mathcal{C} : $[\tilde{F}(f')(\tilde{F}(f)(g))]_Y(k) = (\tilde{F}(f)(g))_Y(kf') = g_Y(kf'f) = [F(f'f)(g)]_Y(k)$. Also ist \tilde{F} ein Funktor. Sei $w \in \mathcal{M}$, $g \in \tilde{F}(X_1)$. Dann ist die Verkettung $F|_{\mathcal{C}}(w) \cdot g \in \tilde{F}(X_1)$ eine natürliche Transformation, womit eine \mathcal{M} -Wirkung auf $\tilde{F}(X_1)$ definiert wird. Falls $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung in \mathcal{D} ist, so gilt: $[w_*\tilde{F}(f)](g) = F|_{\mathcal{C}}(w) \cdot g(- \cdot f) = [F|_{\mathcal{C}}(w) \cdot g](- \cdot f) = [\tilde{F}(f)w_*](g)$. Also ist die Abbildung $\tilde{F}(f)$ mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich.

- (ii) Sei $w \in \mathcal{M}$, $g \in \tilde{F}(X)$, $k : X \rightarrow Y$, Y in \mathcal{B} . Damit operiert \mathcal{M} auf $F(Y)$ trivial und wir haben: $[(F|_{\mathcal{C}}(w) \cdot g)(k)] = w_*[g(k)] = g(k)$. Also operiert \mathcal{M} auf $\tilde{F}(X)$ trivial.
- (iii) Die Abbildung c_X schickt $x \in F(X)$ auf die natürliche Transformation $k \mapsto [F(k)](x)$ ($k : X \rightarrow Y$, Y in \mathcal{C}), die offensichtlich natürlich in X ist. Für $w \in \mathcal{M}$ ist $[w_*(c_X(x))](k) = [F|_{\mathcal{C}}(w) \cdot c_X(x)](k) = F|_{\mathcal{C}}(w)([F(k)](x)) = [F(k)](w_*(x)) = [c_X(w_*(x))](k)$ wegen der Verträglichkeit von F mit \mathcal{M} . Also ist c_X eine \mathcal{M} -Mengen-Abbildung.
- (iv) Sei nun X in \mathcal{C} . Nach dem Yoneda-Lemma ist die Auswertung $ev_{1_X} : \tilde{F}(X) \rightarrow F(X)$ an 1_X eine Bijektion und zwar mit Inversem c_X ($ev_{1_X} \cdot c_X = 1_{F(X)}$). Sei andererseits c_X injektiv. Wegen (ii) und (iii) operiert \mathcal{M} dann auch auf $F(X)$ trivial. Also X ist in \mathcal{B} . □

Bemerkung Für den Fall, dass \mathcal{D} die Kategorie der symmetrischen Spektren von simplizialen Mengen ist und \mathcal{F} die Menge der stabilen Homotopiegruppen $\hat{\pi}_k$, $k \in \mathbb{Z}$ ist, ist die obige Definition von $\tilde{\pi}_k$ nach [Sch09, Exercise E.I.30.] isomorph zur Definition der „echten“ stabilen Homotopiegruppen in [Sch09, Definition 6.35.].

5 Semistabilität

In diesem Kapitel werden auf zwei verschiedene Weisen das Theorem 1.1 verallgemeinert. Allerdings wird im ersten Abschnitt nur eine teilweise Verallgemeinerung erreicht. In diesem Kapitel verwenden wir die Bezeichnungen aus den vorherigen Kapiteln, insbesondere die aus Kapitel 3.

5.1 Die erste Verallgemeinerung

Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine abgeschlossene symmetrisch monoidale Kategorie mit internen Hom-Objekt Hom . Sei T ein Objekt in \mathcal{D} und $\Omega = Hom(T, -)$. Die \mathcal{M} -Wirkung auf $\underline{X}(\omega) \cong (\Theta^\infty X)_0$ (siehe Proposition 4.7) kann im Zusammenhang mit Theorem 3.29 als Ausgangspunkt für eine erste Verallgemeinerung genommen werden.

5.1.1 Vorbereitung

Dafür benötigen wir aber noch einige Lemmata.

Lemma 5.1. *Sei X ein symmetrisches T -Spektrum. Dann gilt für die Strukturabbildung von $\Omega^l X$:*

$$\tilde{\sigma}_n^{\Omega^l X} = \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{l,1}} \cdot \Omega^l \tilde{\sigma}_n^X.$$

Für $R^\infty X$ gilt: $\tilde{\sigma}_n^{R^\infty X} = \text{incl} \cdot \text{colim} \tilde{\sigma}_n^{R^\bullet X}$, wobei incl die Abbildung $\text{colim}(\Omega(R^\bullet X)_{n+1}) \rightarrow \Omega(R^\infty X)_{n+1}$ ist.

Beweis. Zunächst ist für $l = 1$: $\tilde{\sigma}_n^{\Omega X} = \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{1,1}} \cdot \Omega \tilde{\sigma}_n^X$, denn nach Definition ist $\text{ev}_{X_{n+1}}^1 \cdot (\sigma_n^{\Omega X} \wedge T) = \sigma_n^X \cdot (\text{ev}_{X_n}^1 \wedge T) \cdot (\Omega X_n \wedge t_{T,T})$ und damit: $\text{ev} \cdot [(\delta_{2,X_{n+1}} \cdot \tilde{\sigma}_n^{\Omega X}) \wedge T^2] = \text{ev}_{X_{n+1}}^1 \cdot (\text{ev}_{\Omega X_{n+1}}^1 \wedge T) \cdot (\tilde{\sigma}_n^{\Omega X} \wedge T^2) = \text{ev}_{X_{n+1}}^1 \cdot (\sigma_n^{\Omega X} \wedge T) = \sigma_n^X \cdot (\text{ev}_{X_n}^1 \wedge T) \cdot (\Omega X_n \wedge t_{T,T}) = \text{ev}_{X_{n+1}}^1 \cdot (\tilde{\sigma}_n^X \wedge T) \cdot (\text{ev}_{X_n}^1 \wedge T) \cdot (\Omega X_n \wedge t_{T,T}) = \text{ev}_{X_{n+1}}^1 \cdot (\text{ev}_{\Omega X_{n+1}}^1 \wedge T) \cdot (\Omega \tilde{\sigma}_n^X \wedge t_{T,T}) = \text{ev} \cdot (\delta_{2,X_{n+1}} \wedge T^2) \cdot (\Omega \tilde{\sigma}_n^X \wedge t_{T,T}) = \text{ev} \cdot (\text{Hom}(T^2, X_{n+1}) \wedge t_{T,T}) \cdot [(\delta_{2,X_{n+1}} \Omega \tilde{\sigma}_n^X) \wedge T^2] = \text{ev} \cdot (\text{Hom}(t_{T,T}, X_{n+1}) \wedge T^2) \cdot [(\delta_{2,X_{n+1}} \Omega \tilde{\sigma}_n^X) \wedge T^2] = \text{ev} \cdot [(\delta_{2,X_{n+1}} \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{1,1}} \Omega \tilde{\sigma}_n^X) \wedge T^2].$

Nach Induktion über l ist dann: $\tilde{\sigma}_n^{\Omega^{l-1} X} = \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{l-1,1}} \cdot \Omega^{l-1} \tilde{\sigma}_n^{\Omega X} = \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{l-1,1}} \cdot \Omega^{l-1} (\Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{1,1}} \cdot \Omega \tilde{\sigma}_n^X) = \Omega_{X_{n+1}}^{\chi_{l,1}} \cdot \Omega^l \tilde{\sigma}_n^X$, nach Lemma 3.3 und wegen $\chi_{l,1} = (\chi_{l-1,1} + 1) \cdot ((l-1) + \chi_{1,1})$.

Die zweite Aussage folgt, da die Adjungierten der Abbildungen schon auf $(R^l X)_n \wedge T$ übereinstimmen, nämlich dort sind sie: $\sigma_n^{R^l X} = \text{ev} \cdot (\tilde{\sigma}_n^{R^l X} \wedge T)$. \square

Das folgende Lemma beschreibt die Beziehung zwischen der Wirkung des Zykeloperators und der Abbildung $\tilde{\lambda}$.

Lemma 5.2 ([Sch09, Ch. I, Lemma 6.22]). *Sei X ein symmetrisches T -Spektrum. Dann kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} (\Theta^\infty X)_0 & \xrightarrow{d} & (\Theta^\infty X)_0 \\ & \searrow (\Theta^\infty \tilde{\lambda}_X)_0 & \downarrow \cong \\ & & (\Theta^\infty \Omega \text{sh} X)_0 \end{array}$$

Beweis. Der Isomorphismus auf der rechten Seite wird von $\Omega^{1+l} X_{1+l} \xrightarrow{\Omega_{X_{1+l}}^{\chi_{1,l}}} \Omega^{l+1} X_{1+l}$ induziert. In dem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{1+l} X_{1+l} & \xrightarrow{\Omega^{1+l} \tilde{\sigma}} & \Omega^{1+l+1} X_{1+l+1} \\ \downarrow \Omega^{\chi_{1,l}} & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l} \Omega} \\ \Omega^{l+1} X_{1+l} & \xrightarrow{\Omega^{l+1} \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+2} X_{1+l+1} \xrightarrow{\Omega^l \Omega^{\chi_{1,1}}} \Omega^{l+1+1} X_{1+l+1} \end{array}$$

ist nach Lemma 5.1 die untere Komposition gleich $\Omega^l \tilde{\sigma}_{1+l}^{\Omega X}$. Wegen $\Omega^{\chi_{1,l} \Omega} = \Omega^{\chi_{1,l} + 1}$ und $\Omega^l \Omega^{\chi_{1,1}} = \Omega^{l + \chi_{1,1}}$ (Lemma 3.3) sowie $\chi_{1,l+1} = (l + \chi_{1,1}) \cdot (\chi_{1,l} + 1)$ kommutiert es und damit sind die obigen Abbildung mit den Strukturabbildung verträglich.

Das Diagramm im Lemma ist schließlich von folgendem kommutativen Diagramm induziert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^l X_l & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+1} X_{l+1} \xrightarrow{\Omega^{\chi_{l,1}}} \Omega^{1+l} X_{1+l} \\ & \searrow \Omega^l \tilde{\sigma} & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l}} \\ & & \Omega^{l+1} X_{l+1} \xrightarrow{\Omega^{l+1} \chi_{l,1}} \Omega^{l+1} X_{1+l} \end{array}$$

\square

Lemma 5.3. *Es gibt einen Isomorphismus $\text{sym}_{X,n} : (\Theta^\infty X)_n \cong (R^\infty X)_n$ für jedes symmetrische T -Spektrum X .*

Beweis. Der Isomorphismus ist durch einen Isomorphismus zwischen den definierenden Diagrammen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc}
X_n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \Omega X_{n+1} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}} & \Omega^2 X_{n+2} & \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}} & \dots \longrightarrow \Omega^l X_{n+l} \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} \\
\downarrow 1=\alpha_{0,n} & & \downarrow \Omega \alpha_{1,n} & & \downarrow \Omega^2 \alpha_{2,n} & & \downarrow \Omega^l \alpha_{l,n} \\
X_n & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \Omega X_{1+n} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\lambda}} & \Omega^2 X_{2+n} & \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\lambda}} & \dots \longrightarrow \Omega^l X_{l+n} \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\lambda}}
\end{array}$$

Dabei ist $\alpha_{l,n}$ eine Permutation, die induktiv durch das folgende kommutative Diagramm bestimmt wird:

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^l X_{n+l} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+1} X_{n+l+1} & & \\
\downarrow \Omega^l \alpha_{l,n} & & \downarrow \Omega^{l+1}(\alpha_{l,n}+1) & \searrow \Omega^{l+1} \alpha_{l+1,n} & \\
\Omega^l X_{l+n} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+1} X_{l+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{l+1} \chi_{l+n,1}} & \Omega^{l+1} X_{1+l+n}
\end{array}$$

Dabei wird die Σ_{n+l} -Äquivarianz von $\tilde{\sigma}$ benutzt. Damit dies kommutiert wird gesetzt: $\alpha_{l+1,n} = \chi_{l+n,1} \cdot (\alpha_{l,n} + 1)$. Weiterhin zeigt man mit Induktion: $\alpha_{l,n} = \chi_{n,l} \cdot (n + \beta_l)$, wobei $\beta_l \in \Sigma_l$ die Reflektion ist: $\beta_l(i) = l + 1 - i$:

- $\chi_{n,0} \cdot (n + \beta_0) = id$
- $\chi_{l+n,1} \cdot (\alpha_{l,n} + 1) = \chi_{l+n,1} \cdot ([\chi_{n,l} \cdot (n + \beta_l)] + 1) = \chi_{n,l+1} \cdot (n + \beta_{l+1})$

□

Als Corollar bekommen wir einen Zusammenhang zwischen der Wirkung von d auf $sh^n X$ und den Strukturabbildungen von $R^\infty X$.

Corollar 5.4 ([Sch09, Ch. I, Prop. 4.20]). Ω möge mit sequentiellen Colimites kommutieren. Für jedes symmetrische Spektrum X in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ kommutiert dann:

$$\begin{array}{ccc}
(\Theta^\infty sh^n X)_0 & = & (\Theta^\infty X)_n \xrightarrow{\text{sym}_{X,n}} (R^\infty X)_n \\
\downarrow d & & \downarrow \tilde{\sigma}_n^{R^\infty X} \\
(\Theta^\infty sh^n X)_0 & = & (\Theta^\infty X)_n \cong \Omega(\Theta^\infty X)_{n+1} \xrightarrow{\Omega \text{sym}_{X,n+1}} \Omega(R^\infty X)_{n+1}
\end{array}$$

Beweis. Zusammen mit Lemma 5.1 (untere Komposition) genügt es zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert (was transponiert gelesen werden muss):

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^l X_{n+l} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+1} X_{n+l+1} & \xrightarrow{\Omega^{\chi_{l,1}(n+\chi_{l,1})}} & \Omega^{1+l} X_{n+1+l} \\
\downarrow \Omega^l \alpha_{l,n} & & \downarrow \Omega^{l+1}(\alpha_{l,n}+1) & & \downarrow \Omega^{1+l} \alpha_{l,n+1} \\
\Omega^l X_{l+n} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}} & \Omega^{l+1} X_{l+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{\chi_{l,1}}} & \Omega^{1+l} X_{l+n+1}
\end{array}$$

Dies kommutiert, weil $\alpha_{l,n+1} \cdot (n + \chi_{l,1}) = \chi_{n+1,l} \cdot (n + 1 + \beta_l) \cdot (n + \chi_{l,1}) = \chi_{n+1,l} \cdot (n + \chi_{l,1}) \cdot (n + \beta_l + 1) = [\chi_{n,l} \cdot (n + \beta_l)] + 1 = \alpha_{l,n} + 1$ gilt. □

Lemma 5.5. Sei $X \in Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$. Dann sind $\tilde{\lambda}_{shX}$ und $sh\tilde{\lambda}_X$ in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ isomorph.

Beweis. Hierzu wird der Isomorphismus $\Omega sh(shX) \xrightarrow{\cong} sh(\Omega shX)$ benutzt, der levelweise $\Omega X_{1+1+n} \xrightarrow{\Omega(\chi_{1,1+n})} \Omega X_{1+1+n}$ ist. Offenbar ist er Σ_n -äquivariant. Dieser ist eine Abbildung in $Sp(\mathcal{D}, T)$, da

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega X_{1+1+n} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}} & \Omega^2 X_{1+1+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{\chi_{1,1}}} & \Omega^2 X_{1+1+n+1} \\
\downarrow \Omega(\chi_{1,1+n}) & & \downarrow \Omega^2(\chi_{1,1+n+1}) & & \downarrow \Omega^2(\chi_{1,1+(n+1)}) \\
\Omega X_{1+1+n} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}} & \Omega^2 X_{1+1+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{\chi_{1,1}}} & \Omega^2 X_{1+1+n+1}
\end{array}$$

kommutiert (Lemma 5.1). Damit gibt es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
shX & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_{shX}} & \Omega sh(shX) \\
& \searrow sh\tilde{\lambda}_X & \downarrow \cong \\
& & sh(\Omega shX)
\end{array}$$

denn levelweise ist es:

$$\begin{array}{ccccc}
X_{1+n} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \Omega X_{1+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{(1+\chi_{n,1})}} & \Omega X_{1+1+n} \\
\parallel & & \parallel & & \downarrow \Omega(\chi_{1,1+n}) \\
X_{1+n} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \Omega X_{1+n+1} & \xrightarrow{\Omega^{\chi_{1+n,1}}} & \Omega X_{1+1+n}
\end{array}$$

□

Lemma 5.6. Sei $X \in Sp^{\Sigma}(\mathcal{D}, T)$. Es gibt einen natürlichen Isomorphismus: $(\Theta^{\infty} RX)_n \cong (\Theta^{\infty} X)_n$

Beweis. Der Isomorphismus wird durch einen Isomorphismus zwischen den definierenden Diagrammen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega X_{n+1} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1}^X} & \Omega^2 X_{n+2} & \xrightarrow{\Omega^2 \tilde{\sigma}_{n+2}^X} & \cdots & \longrightarrow & \Omega^l X_{n+l} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}_{n+l}^X} & \Omega^{l+1} X_{n+l+1} & \xrightarrow{\Omega^{l+1} \tilde{\sigma}_{n+l+1}^X} & \longrightarrow \\
\downarrow 1 & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,1}} & & & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l-1}} & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l}} & & \\
\Omega X_{1+n} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_n^{RX}} & \Omega^2 X_{1+n+1} & \xrightarrow{\Omega \tilde{\sigma}_{n+1}^{RX}} & \cdots & \longrightarrow & \Omega^l X_{1+n+l-1} & \xrightarrow{\Omega^{l-1} \tilde{\sigma}_{n+l-1}^{RX}} & \Omega^{l+1} X_{1+n+l} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}_{n+l}^{RX}} & \longrightarrow
\end{array}$$

Die Kommutativität des Diagramms wird mit folgendem kommutativen Diagramm sowie $\Omega^{l-1+\chi_{1,1}} = \Omega^{l-1} \Omega^{\chi_{1,1}}$ (siehe Lemma 3.3) gezeigt:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^l X_{n+l} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}_{n+l}^X} & \Omega^{l+1} X_{n+l+1} \\
\downarrow \Omega^{\chi_{1,l-1}} & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l}} \\
\Omega^l X_{1+n+l-1} & \xrightarrow{\Omega^l \tilde{\sigma}_{1+n+l-1}^X} & \Omega^{l+1} X_{1+n+l} & \xrightarrow{\Omega^{l-1+\chi_{1,1}}} & \Omega^{l+1} X_{1+n+l} \\
& & \swarrow \Omega^{\chi_{1,l-1}+1} & & \downarrow \Omega^{\chi_{1,l}}
\end{array}$$

□

5.1.2 Proposition und Beispiele

In diesem Abschnitt wird eine erste, jedoch unvollständige Verallgemeinerung von Theorem 1.1 bewiesen und anschließend ein Beispiel für \mathcal{D} gegeben, bei dem die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Proposition 5.7. Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine symmetrisch monoidale Modellkategorie und T cofasernd. Für $Sp(\mathcal{D}, T)$ möge die levelweise projektive Modellkategorie existieren (siehe Def. 3.19). Die folgenden Bedingungen werden vorausgesetzt:

(a) Für jede Abbildung f in $Sp(\mathcal{D}, T)$ sind äquivalent (siehe auch Theorem 3.29):

- f ist eine stabile Äquivalenz (siehe Def. 3.21).
- Für jede levelweise fasernde Ersetzung f' von f gilt, dass $\Theta^{\infty} f'$ eine Level-Äquivalenz ist.
- Es gibt eine levelweise fasernde Ersetzung f' von f , so dass $\Theta^{\infty} f'$ eine Level-Äquivalenz ist.

(b) Abzählbare Verknüpfungen von stabilen Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ zwischen level-fasernden Objekten seien stabile Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$.

(c) Ω vertausche mit sequentiellen Colimites in \mathcal{D} .

(d) Sequentielle Colimites von fasernden Objekten in \mathcal{D} sind fasernd.

Sei X ein symmetrisches Spektrum in $Sp^{\Sigma}(\mathcal{D}, T)$, das levelweise fasernd ist. Dann sind (i) bis (iv) äquivalent, und (v) folgt aus den ersten vier Punkten.

(i) Es gibt eine Abbildung in $Sp^{\Sigma}(\mathcal{D}, T)$ von X zu einem Ω -Spektrum, welche in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz ist.

(ii) Der Morphismus $\tilde{\lambda}_X : X \rightarrow RX$ ist eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass der Zykeloperator $d_{sh^n X} : (\Theta^{\infty} sh^n X)_0 \rightarrow (\Theta^{\infty} sh^n X)_0$ eine schwache Äquivalenz ist.

(iv) Das symmetrische Spektrum $R^{\infty} X$ ist ein Ω -Spektrum.

(v) Der Morphismus $\lambda_X^\infty : X \rightarrow R^\infty X$ in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, K)$ ist eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$.

Beweis. • (i) \implies (ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$, wobei Y ein Ω -Spektrum ist, so dass f in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz ist. Dann ist wegen Proposition 3.30 auch Rf eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$. Da dann $\tilde{\lambda}_Y$ ($(\tilde{\lambda}_Y)_i = \chi_{i,1}^Y \cdot \tilde{\sigma}_i^Y$) eine Level-Äquivalenz ist, also auch eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$, folgt mit der Natürlichkeit von $\tilde{\lambda}$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \tilde{\lambda}_X & & \downarrow \tilde{\lambda}_Y \\ RX & \xrightarrow{Rf} & RY \end{array}$$

und mit dem 2 von 3-Axiom (was hier wegen [Hi, Prop. 3.2.3] gilt, siehe Def. 3.21), dass $\tilde{\lambda}_X$ in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz ist.

- (ii) \Leftrightarrow (iii) Nach Lemma 5.2 gilt: $d_{sh^n X} \cong (\Theta^\infty \tilde{\lambda}_{sh^n X})_0$. Weiterhin gilt nach Lemma 5.5, dass $\tilde{\lambda}_{sh^n X} \cong sh^n \tilde{\lambda}_X$. Ferner $(\Theta^\infty sh^n)_0 \cong (\Theta^\infty)_n$. Also gilt: $d_{sh^n X} \cong (\Theta^\infty \tilde{\lambda}_X)_n$. Da Ω ein rechter Quillen-Funktor von \mathcal{D} ist, sind sowohl X (nach Voraussetzung) als auch RX level-fasernd. Mit (a) und diesem Isomorphismus gilt schließlich, dass $\tilde{\lambda}_X$ genau dann in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $d_{sh^n X}$ schwache Äquivalenzen in \mathcal{D} sind.
- (iii) \Leftrightarrow (iv) Nach Proposition 3.30 sind $R^s \tilde{\lambda}_X$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$ stabile Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ - und zwar zwischen level-fasernden Objekten (Ω ist rechter Quillen-Funktor). Nach Voraussetzung (b) ist auch die Inklusion dann λ_X^∞ eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$.
- (ii) \implies (i) Das folgt aus: (ii) \implies (iv), (v). □

Eine Klasse von Beispielen bilden die fast endlich erzeugten Modellkategorien:

Proposition 5.8. Sei \mathcal{D} eine symmetrisch monoidale Modellkategorie, die fast endlich erzeugt ist und in der sequentielle Colimites mit endlichen Produkten vertauschen. Sei T ein cofaserndes Objekt von \mathcal{D} , so dass Ω mit sequentiellen Colimites vertauscht. Dann erfüllt das Paar (\mathcal{D}, T) die Voraussetzungen von Proposition 5.7.

Beweis. (a) gilt wegen Theorem 3.29.

(b) Das ist die Aussage von Proposition 3.27.

(c) Nach Voraussetzung.

(d) gilt nach Lemma 2.19 (iv). □

Corollar 5.9. Alle Voraussetzungen von Proposition 5.7 sind für die Kategorie der punktierten motivischen Räume mit der motivisch abgeschlossen-flasquen Modellstruktur und allen abgeschlossen-flasque cofasernden Objekte T , sodass $Hom(T, -)$ mit sequentiellen Colimites vertauscht, erfüllt. Insbesondere also für $T = \mathbb{P}^1$.

Beweis. Die motivisch abgeschlossen-flasque Modellstruktur ist nach Theorem 2.43 monoidal und nach Proposition 2.49 fast endlich erzeugt. Die Aussage für $T = \mathbb{P}^1$ folgt aus Lemma 3.41. □

Bemerkung Auch die Modellkategorie $sSet_*$ zusammen mit dem Objekt S^1 erfüllt die Voraussetzung von Proposition 5.7 (siehe Abschnitt 2.2). Die Aussage, dass $d_{sh^n X}$ für alle $n \geq 0$ eine schwache Äquivalenz ist, ist nach folgendem Lemma 5.10 dazu äquivalent, dass der Zykeloperator d auf allen stabilen Homotopiegruppen $\hat{\pi}_k(X), k \in \mathbb{Z}$, Bijektionen induziert. Außerdem sind nach Cor. 3.33 die stabilen Äquivalenzen in $Sp(sSet_*, S^1)$ genau die $\hat{\pi}_*$ -Äquivalenzen. Damit ist Proposition 5.7 tatsächlich eine partielle Verallgemeinerung von Theorem 1.1.

Lemma 5.10. Sei $X \in Sp^\Sigma(sSet_*, S^1)$. Dass $d_{sh^n X} : (\Theta^\infty sh^n X)_0 \rightarrow (\Theta^\infty sh^n X)_0$ eine schwache Äquivalenz ist, ist dazu äquivalent, dass der Zykeloperator d auf allen stabilen Homotopiegruppen $\hat{\pi}_{k-n}(X), k \in \mathbb{N}_0$, Bijektionen induziert.

Beweis. Nach Lemma 2.38 über Basispunkte und Lemma 5.2 ist $d_{sh^n X}$ genau dann eine schwache Äquivalenz, wenn für alle $k \geq 0$, $\pi_k(d_{sh^n X})$ eine Bijektion ist. Wegen der Bemerkung nach Lemma 4.7 ist $\pi_k(d_{sh^n X})$ isomorph zur Wirkung des Zykeloperators auf $\hat{\pi}_k(sh^n X)$. Weiterhin haben wir als \mathcal{M} -Moduln $\hat{\pi}_k(sh^n X) \cong \hat{\pi}_{k-n}(X)(n)$ (siehe Prop. 5.16, zusammen mit der Bemerkung nach Def. 5.13 sowie dem Beispiel nach 3.44). Wegen der Zahmheit operiert der Zykeloperator auf $\hat{\pi}_{k-n}(X)(n)$ genau dann als Bijektion, wenn die \mathcal{M} -Wirkung von $\hat{\pi}_{k-n}(X)(n)$ trivial ist. Dies gilt wiederum wegen der Zahmheit genau dann, wenn die \mathcal{M} -Wirkung auf $\hat{\pi}_{k-n}(X)$ trivial ist, da dann die Filtrierung beschränkt ist (siehe Lemma 4.3). Letzteres ist auch dazu äquivalent, dass der Zykeloperator auf $\hat{\pi}_{k-n}(X)$ trivial operiert. \square

Als vorläufige Definition für Semistabilität nehmen wir (siehe auch Def. 5.14 und die Bemerkung danach):

Definition 5.11. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 5.7 und die projektiv levelweise Modellstruktur auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ existiere, also insbesondere der Funktor J^Σ (siehe Def. 3.20). Ein symmetrisches Spektrum $X \in Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ heißt in diesem Abschnitt semistabil, falls $J^\Sigma X$ eine der obigen Eigenschaften (i) – (iv) erfüllt.*

Als Beispiel für diese Definition haben wir ähnlich wie [HSS, Proposition 5.6.5]:

Proposition 5.12. *Es gelten die Voraussetzungen von Proposition 5.7 und die projektiv levelweise Modellstruktur auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ existiere. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ zwischen semistabilen symmetrischen Spektren. Der Vergissfunktors $U : Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T) \rightarrow Sp(\mathcal{D}, T)$ möge stabile Äquivalenzen reflektieren. Falls f eine stabile Äquivalenz in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ist, so ist $U(f)$ in $Sp(\mathcal{D}, T)$ eine stabile Äquivalenz.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $J^\Sigma f$ zu zeigen, denn $Z \rightarrow J^\Sigma Z$ ist eine natürliche Level-Äquivalenz, d.h. wir können f durch $J^\Sigma f$ ersetzen und annehmen, dass X und Y levelweise fasernd sind sowie die Aussagen von Prop. 5.7 für X und Y gelten.

Nach Voraussetzung sind in dem kommutativen Diagramm in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_X^\infty} & R^\infty X \\ \downarrow f & & \downarrow R^\infty f \\ Y & \xrightarrow{\tilde{\lambda}_Y^\infty} & R^\infty Y \end{array}$$

$R^\infty X$ und $R^\infty Y$ Ω -Spektren und damit fasernde Objekte in der stabilen Modellstruktur auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$, sowie $U(\tilde{\lambda}_X^\infty)$ und $U(\tilde{\lambda}_Y^\infty)$ stabile Äquivalenzen. Nach der Voraussetzung über U sind dann $\tilde{\lambda}_X^\infty$ und $\tilde{\lambda}_Y^\infty$ stabile Äquivalenzen in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$. Da f eine stabile Äquivalenz in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ ist, somit auch $R^\infty f$, ist nach [Hi, Theorem 3.2.13] $R^\infty f$ eine Level-Äquivalenz. Also ist $U(R^\infty f)$ eine stabile Äquivalenz und damit auch $U(f)$. \square

Bemerkung Die Bedingung in letzter Proposition, dass U stabile Äquivalenzen reflektiert, gilt für $\mathcal{D} = M^{cm}(S)$, denn nach [PPR1, Theorem A.5.6 und Theorem A.6.4] stimmen die stabilen Äquivalenzen für jeweils $Sp(\mathcal{D}, T)$ und $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ in [Ja2] und [PPR1] überein und für die stabilen Äquivalenzen in [Ja2] gilt nach [Ja2, Prop. 4.8] diese Bedingung.

Bemerkung Wenn man nun Proposition 5.7 mit Theorem 1.1 vergleicht, stellt man fest, dass einige Dinge fehlen. In den folgenden Abschnitten (Theorem 5.20) wird dies ergänzt.

5.2 Definition der \mathcal{M} -Wirkung auf stabilen Homotopiegruppen

Es gelten die Voraussetzung des Abschnittes 3.4.4 und das Objekt T habe ein Vorzeichen. Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von [Sch08M, 1.2 Construction, Step 1]:

Proposition-Definition 5.13. *Sei $q \in \mathbb{Z}$ und $V \in \mathcal{B}$. Wir definieren einen Funktor $\mathcal{I} \rightarrow Ab$ für ein T -Spektrum X in \mathcal{D} und erhalten dann mit Hilfe von Lemma 4.5 eine \mathcal{M} -Wirkung auf dessen Auswertung an ω , welche die stabile Homotopiegruppe $\pi_q^V(X)$ (siehe Abschnitt 3.4.4) sein wird.*

Einem Objekt m in \mathcal{I} ordnen wir die abelsche Gruppe $[V \wedge T^{q+m}, X_m]$ (siehe Lemma 3.45) zu, falls $q + m \geq 2$, und sonst die Gruppe 0. Sei $f : m \rightarrow n$ ein Morphismus in \mathcal{I} , also eine injektive Abbildung und damit $n \geq m$. Wähle eine Permutation $\gamma \in \Sigma_n$ mit $f = \gamma|_m$. Der Abbildung f ordnen wir die Komposition

$$[V \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{\sigma_*^{n-m}(-\wedge T^{n-m})} [V \wedge T^{q+n}, X_n] \xrightarrow{(V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1})^* \gamma_*} [V \wedge T^{q+n}, X_n]$$

zu, falls $q + m \geq 2$, und sonst die Nullabbildung. Die Zuordnung definiert einen \mathcal{I} -Funktor und die Auswertung an ω ergibt genau $\pi_q^V(X)$.

Beweis. Die Abbildung $V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1}$ ist definiert, da V und T cofasernd sind (siehe Lemma 2.11). Die obige Komposition ist ein Gruppenhomomorphismus, denn die Gruppenstruktur ist natürlich sowie mit $-\wedge T$ verträglich (Lemma 3.45) und es gilt $V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1} = V \wedge T \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-2}$ (nach Def. 2.56). Die Zuordnung für Morphismen ist wohldefiniert: Seien $\gamma, \gamma' \in \Sigma_n$ mit $\gamma|_m = \gamma'|_m$. Dann gibt es ein $\tau \in \Sigma_{n-m}$ mit $\gamma'^{-1}\gamma = m + \tau$ und die Gleichheit der durch γ und γ' definierten Abbildungen ist äquivalent zur Gleichheit der zwei Kompositionen:

$$[V \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{\sigma_*^{n-m}(-\wedge T^{n-m})} [V \wedge T^{q+n}, X_n] \xrightarrow[(V \wedge |m+\tau|_T \wedge T^{q+n-1})^*]{(1_m \times \tau)_*} [V \wedge T^{q+n}, X_n]$$

Sei $n \geq m$ (sonst ist die Aussage trivial). Nach Definition 2.56 gilt $|m + \tau|_T \wedge T^{q+n-1} = T^{q+m} \wedge |\tau|_T \wedge T^{n-m-1} = T^{q+m} \wedge \tau_T$ in $Ho(\mathcal{D})$ und somit auch nach Smashen $V \wedge -$. Wegen der Äquivarianz $(m + \tau) \cdot \sigma^{n-m} = \sigma^{n-m} \cdot (X_m \wedge \tau)$ und der Gleichheit der folgenden beiden Kompositionen (siehe Lemma 2.12)

$$[V \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{(-\wedge T^{n-m})} [V \wedge T^{q+m} \wedge T^{n-m}, X_m \wedge T^{n-m}] \xrightarrow[(V \wedge T^{q+m} \wedge \tau)^*]{(X_m \wedge \tau)_*} [V \wedge T^{q+m} \wedge T^{n-m}, X_m \wedge T^{n-m}]$$

ist schließlich die obige Zuordnung wohldefiniert.

Weiterhin ist zu zeigen, dass dies einen Funktor definiert. Es ist klar, dass Identitäten erhalten bleiben (denn dann ist $m = n$ und $\gamma = 1 \in \Sigma_n$). Seien nun zwei Abbildungen $f : m \rightarrow n$ und $g : n \rightarrow n'$ gegeben. Wähle $\gamma \in \Sigma_n$ und $\delta \in \Sigma_{n'}$ mit $f = \gamma|_m$ und $g = \delta|_n$. Dann gilt $(\delta \cdot (\gamma \times 1_{n'-n}))|_m = g \cdot f$ für $\delta \cdot (\gamma \times 1_{n'-n}) \in \Sigma_{n'}$. Für eine Abbildung $k : V \wedge T^{q+m} \rightarrow X_m$ in $Ho(\mathcal{D})$ ist:

$$\begin{aligned} & [(V \wedge |\delta|_T \wedge T^{q+n'-1})^* \cdot \delta_* \cdot \sigma_*^{n'-n} \cdot (-\wedge T^{n'-n})] \cdot [(V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1})^* \cdot \gamma_* \cdot \sigma_*^{n-m} \cdot (-\wedge T^{n-m})](k) \\ &= [(V \wedge |\delta|_T \wedge T^{q+n'-1})^* \cdot \delta_* \cdot \sigma_*^{n'-n} \cdot (-\wedge T^{n'-n})](\gamma \cdot \sigma^{n-m} \cdot (k \wedge T^{n-m}) \cdot (V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1})) \\ &= \delta \cdot \sigma^{n'-n} \cdot [(\gamma \cdot \sigma^{n-m} \cdot (k \wedge T^{n-m}) \cdot (V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n-1})) \wedge T^{n'-n}] \cdot (V \wedge |\delta|_T \wedge T^{q+n'-1}) \\ &= [\delta \cdot (\gamma + (n' - n))] \cdot [\sigma^{n'-n} \cdot (\sigma^{n-m} \wedge T^{n'-n})] \cdot (k \wedge T^{n'-m}) \cdot (V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+n'-1}) \cdot (V \wedge |\delta|_T \wedge T^{q+n'-1}) \\ &= [\delta \cdot (\gamma + (n' - n))] \cdot \sigma^{n'-m} \cdot (k \wedge T^{n'-m}) \cdot (V \wedge [|\gamma|_T |\delta|_T] \wedge T^{q+n'-1}) \\ &= [\delta \cdot (\gamma + (n' - n))] \cdot \sigma^{n'-m} \cdot (k \wedge T^{n'-m}) \cdot (V \wedge [(\delta \cdot (\gamma + (n' - n)))]_T \wedge T^{q+n'-1}) \\ &= [(V \wedge [(\delta \cdot (\gamma + (n' - n)))]_T \wedge T^{q+n'-1})^* \cdot [\delta \cdot (\gamma + (n' - n))]_* \cdot \sigma_*^{n'-m} \cdot (-\wedge T^{n'-m})](k), \end{aligned}$$

denn $sgn(\delta \cdot (\gamma + (n' - n))) = sgn(\delta) \cdot sgn(\gamma)$. Also ist die Zuordnung mit Kompositionen verträglich. Wenn wir das Bild der Inklusion $m \rightarrow m + 1$ betrachten, erhalten wir die Abbildungen $\sigma_*(-\wedge T)$. Also ist die Auswertung an ω genau $\pi_q^V(X)$. \square

Bemerkung • Diese Definition stimmt im Fall von $\mathcal{D} = sSet_*$, $T = S^1$ mit der Definition in [Sch09, Construction 6.2.] überein, denn $|(-1)_{S^1}|$ ist zu einer Selbstabbildung von S^1 vom Grad -1 isomorph.

- Im Fall von $\mathcal{D} = M^{cm}(S)$ und $T = \mathbb{P}^1$ hängt der Begriff der Semistabilität nicht von der Modellstruktur ab, sondern nur von der motivischen Homotopiekategorie $Ho(\mathcal{D})$, da obige Definition nur Morphismenmengen von $Ho(\mathcal{D})$ und Funktoren auf $Ho(\mathcal{D})$ benutzt.

Definition 5.14 ([Sch09, Ch. I, Def. 6.23]). *Ein symmetrisches T -Spektrum X heißt in diesem und den folgenden Abschnitten semistabil, wenn die \mathcal{M} -Wirkung (Def. 5.13) auf allen Homotopiegruppen von X trivial ist.*

Bemerkung Falls π^B -stabile Äquivalenzen mit stabilen Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ (siehe Def. 3.21) übereinstimmen, folgt unter den Voraussetzungen von Theorem 5.20, dass die beiden Begriffe von Semistabilität (Definition 5.11 und 5.14) übereinstimmen. Dies gilt insbesondere für $\mathcal{D} = M^{cm}(S)$ (siehe 3.43 und 5.21).

Lemma 5.15. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine π^B -stabile Äquivalenz in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$. Dann ist $\pi_q^V(f)$ ein Isomorphismus von \mathcal{M} -Objekten. Insbesondere, ist X genau dann semistabil, wenn Y semistabil ist.*

Beweis. Nach Definition ist die Abbildung $\pi_q^V(f)$ mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich und nach Voraussetzung auch ein Isomorphismus. \square

5.3 Einige \mathcal{M} -Isomorphismen zwischen stabilen Homotopiegruppen

Es gelten die Voraussetzung des Abschnittes 3.4.4 und das Objekt T besitze ein Vorzeichen. Die stabilen Homotopiegruppen von $shX, T \wedge X$ und ΩX können durch die stabilen Homotopiegruppen von X ausgedrückt werden:

Proposition 5.16 ([Sch09, Ch. I, Example 6.15, 6.16, S. 94]). *Sei X ein T -Spektrum in \mathcal{D} , und $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$. Dann gibt es folgende natürliche Isomorphismen von Gruppen und diese sind mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich, falls X symmetrisch ist:*

- (i) $\pi_{q+1}^V(shX) \cong \pi_q^V(X)(1)$,
- (ii) $\pi_q^V(\Omega X) \cong \pi_{q+1}^V(X)$, falls X level-fasernd und T cofasernd ist, und
- (iii) $\pi_q^V(X) \xrightarrow{T \wedge -} \pi_{1+q}^V(T \wedge X)$.

Hierbei bedeutet $W(1)$ für ein Objekt W mit \mathcal{M} -Wirkung das Objekt W mit der durch $M \rightarrow M, f \mapsto 1 + f$ eingeschränkten \mathcal{M} -Wirkung auf W .

Diese Isomorphismen sind auch mit dem Vorzeichen von T verträglich.

Beweis. • Zunächst zeigen wir, dass die Isomorphismen existieren und danach die Verträglichkeit mit der \mathcal{M} -Wirkung.

(i) Wir haben triviale Isomorphismen:

$$\begin{aligned} & \operatorname{colim}_{m \geq 0, (q+1)+m \geq 2} (\dots [V \wedge T^{(q+1)+m}, X_{1+m}] \xrightarrow{\sigma_*(-\wedge T)} [V \wedge T^{(q+1)+(m+1)}, X_{1+(m+1)}] \dots) \\ &= \operatorname{colim}_{m \geq 0, q+(1+m) \geq 2} (\dots [V \wedge T^{q+(1+m)}, X_{1+m}] \xrightarrow{\sigma_*(-\wedge T)} [V \wedge T^{q+((1+m)+1)}, X_{(1+m)+1}] \dots) \\ &\cong \pi_{r,q}(X) \end{aligned}$$

(ii) Da die X_m fasernd sind, haben wir folgende Isomorphismen (siehe Lemma 2.8, $V \wedge T^{q+m}$ ist cofasernd):

$$[V \wedge T^{q+m}, \Omega X_m] \xrightarrow{\alpha_{V \wedge T^{q+m}, X_m}} [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_m] \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1,q+m})^*} [V \wedge T \wedge T^{q+m}, X_m],$$

welche mit den Strukturabbildungen verträglich sind, d.h. es kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} [V \wedge T^{q+m}, \Omega X_m] & \xrightarrow{\alpha_{V \wedge T^{q+m}, X_m}} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_m] & \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1,q+m})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, X_m] \\ \downarrow \sigma_*^{\Omega X}(-\wedge T) & & \downarrow \sigma_*^X(-\wedge T) & & \downarrow \sigma_*^X(-\wedge T) \\ [V \wedge T^{q+m+1}, \Omega X_{m+1}] & \xrightarrow{\alpha_{V \wedge T^{q+m+1}, X_{m+1}}} & [V \wedge T^{q+m+1} \wedge T, X_{m+1}] & \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1,q+m+1})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m+1}, X_{m+1}] \end{array}$$

Sei $f : V \wedge T^{q+m} \rightarrow \Omega X_m$ eine Abbildung in $Ho(\mathcal{D})$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \alpha_{V \wedge T^{q+m+1}, X_{m+1}}(\sigma_*^{\Omega X} \cdot (f \wedge T)) &= ev \cdot ([\sigma_*^{\Omega X} \cdot (f \wedge T)] \wedge T) = \sigma^X \cdot (ev_X \wedge T) \cdot (1 \wedge \chi_{1,1}) \cdot (f \wedge T^2) = \\ &= \sigma^X \cdot (ev_X \wedge T) \cdot (f \wedge \chi_{1,1}). \text{ Somit ist das Bild von } f \text{ über die unter Komposition:} \\ \sigma^X \cdot (ev_X \wedge T) \cdot (f \wedge \chi_{1,1}) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m+1}) &= \sigma^X \cdot (ev_X \wedge T) \cdot (f \wedge T^2) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m} \wedge T). \end{aligned}$$

Andererseits ist dies gleich

$$\sigma^X \cdot ([\alpha_{V \wedge T^{q+m}, X_m}(f) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m})] \wedge T) = \sigma^X \cdot ((ev \cdot (f \wedge T) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m})) \wedge T).$$

Die Abbildung $\alpha_{V \wedge T^{q+m}, X_m}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, weil Smashen mit T von rechts die Gruppenstruktur erhält und diese natürlich ist (siehe Lemma 3.45). Für die hintere Abbildung $(V \wedge \chi_{1,q+m})^*$ haben wir $(V \wedge \chi_{1,q+m})^* = (V \wedge |\chi_{1,q+m}|_T \wedge T^{q+m})^* = (V \wedge T^{q+m} \wedge |\chi_{1,q+m}|_T)^*$ (nach Def. 2.56), also ist aufgrund der Natürlichkeit der Gruppenstruktur auch $(V \wedge \chi_{1,q+m})^*$ ein Gruppenhomomorphismus.

(iii) Da der Funktor $T \wedge -$ auf \mathcal{D} schwache Äquivalenzen erhält, induziert er Abbildungen

$$[V \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{T \wedge -} [T \wedge V \wedge T^{q+m}, T \wedge X_m] \xrightarrow{(t_{V,T} \wedge T^{q+m})^*} [V \wedge T \wedge T^{q+m}, T \wedge X_m],$$

welche offensichtlich mit den Strukturabbildungen verträglich sind:

$$\begin{aligned} [(T \wedge \sigma)_* \cdot (-\wedge T)] \cdot [(t_{V,T} \wedge T^{q+m})^* \cdot (T \wedge -)] &= (T \wedge \sigma)_* \cdot (t_{V,T} \wedge T^{q+m} \wedge T)^* \cdot (T \wedge -) \cdot (-\wedge T) = \\ [(t_{V,T} \wedge T^{q+m} \wedge T)^* \cdot (T \wedge -)] \cdot [\sigma_* \cdot (-\wedge T)]. \end{aligned}$$

Für jedes $f : V \wedge T^{q+m} \rightarrow X_m$ in $Ho(\mathcal{D})$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} V \wedge T \wedge T^{q+m} & \xrightarrow{t_{V,T} \wedge T^{q+m}} & T \wedge V \wedge T^{q+m} & \xrightarrow{T \wedge f} & T \wedge X_m \\ & \searrow t_{T, T^{q+m}} & \uparrow t_{V \wedge T^{q+m}, T} & & \uparrow t_{T, X_m} \\ & & V \wedge T^{q+m} \wedge T & \xrightarrow{f \wedge T} & X_m \wedge T \end{array}$$

und damit ist obige Abbildung gleich der Komposition:

$$[V \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{-\wedge T} [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_m \wedge T] \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1,q+m})^* \cdot t_{T, X_m^*}} [V \wedge T \wedge T^{q+m}, T \wedge X_m]$$

Nach den gleichen Argumenten wie im Punkt (ii) ist dies auch ein Gruppenhomomorphismus.

Die durch obige Abbildungen auf Colimites induzierte Abbildung ist die gewünschte Abbildung $T \wedge -$, die hier auch mit $(T \wedge -)_X$ bezeichnet wird. Diese Abbildung ist natürlich in X . Falls $X^c \rightarrow X$ eine Level-Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$ ist, sind die Abbildungen $(T \wedge -)_X$ und $(T \wedge -)_{X^c}$ isomorph, da $T \wedge -$ schwache Äquivalenzen in \mathcal{D} erhält und Level-Äquivalenzen auf stabilen Homotopiegruppen Isomorphismen ergeben. Da es nach Lemma 3.28 eine solche Level-Äquivalenz gibt, so dass X^c levelweise cofasernd ist, können wir annehmen, dass X levelweise cofasernd ist, wenn wir zeigen, dass $(T \wedge -)_X$ für alle X ein Isomorphismus ist. Dies brauchen wir, damit später die Smash-Produkte aller Abbildungen in $Ho(\mathcal{D})$ definiert sind (denn dann sind alle Objekte dort cofasernd, siehe Lemma 2.11).

• **Injektivität:** Im folgenden kommutativen Diagramm faktorisieren die Abbildungen (über untere linke Ecke) die Strukturabbildungen (obere Horizontale):

$$\begin{array}{ccccc} [V \wedge T^{q+m}, X_m] & \xrightarrow{-\wedge T} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_m \wedge T] & \xrightarrow{\sigma_*} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_{m+1}] \\ & & \nearrow^{t_{V \wedge T^{q+m}, T}^* \cdot t_{T, X_m^*}} & & \uparrow \sigma_* \\ [T \wedge V \wedge T^{q+m}, T \wedge X_m] & \xrightarrow{(t_{V, T \wedge T^{q+m}})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, T \wedge X_m] & \xrightarrow{(V \wedge \chi_{q+m, 1})^* \cdot t_{T, X_m^*}} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_m \wedge T] \end{array}$$

Das äußere Rechteck kommutiert, weil die Teile des Diagramms kommutieren.

• **Surjektivität:** Urbilder liefert die folgende Abbildung:

$$[V \wedge T^{1+q+m}, T \wedge X_m] \xrightarrow{(V \wedge \chi_{q+m, 1})^* \cdot t_{T, X_m^*}} [V \wedge T^{(q+m)+1}, X_m \wedge T] \xrightarrow{\sigma_*} [V \wedge T^{q+m+1}, X_{m+1}].$$

Es ist nun zu zeigen, dass die Komposition dieser mit obiger Abbildung die Abbildung $\sigma_*^{T \wedge X}(-\wedge T)$ ergibt. Dafür brauchen wir an mehreren Stellen, dass T ein Vorzeichen (Def. 2.56) hat. Sei $f : V \wedge T^{1+q+m} \rightarrow T \wedge X_m$ eine Abbildung in $Ho(\mathcal{D})$. Dann ist:

$$[(t_{V, T \wedge T^{1+q+m}})^* \cdot (T \wedge -)] \cdot [\sigma_* \cdot t_{T, X_m^*} \cdot (V \wedge \chi_{q+m, 1})^*](f) = [(t_{V, T \wedge T^{1+q+m}})^* \cdot (T \wedge -)](\sigma \cdot t_{T, X_m} \cdot f \cdot (V \wedge \chi_{q+m, 1})) = T \wedge (\sigma \cdot t_{T, X_m} \cdot f \cdot (V \wedge \chi_{q+m, 1})) \cdot (t_{V, T \wedge T^{q+m+1}}) = \sigma^{T \wedge X} \cdot (T \wedge t_{T, X_m}) \cdot (T \wedge f) \cdot (t_{V, T \wedge \chi_{q+m, 1}})$$

Betrachten wir nun zunächst:

$$\begin{aligned} (T \wedge t_{T, X_m}) \cdot (T \wedge f) &= (T \wedge t_{T, X_m}) \cdot (t_{T, T \wedge X_m})^2 \cdot (T \wedge f) \\ &= [(T \wedge t_{T, X_m}) \cdot (t_{T, T \wedge X_m})] \cdot [((-1)_T \wedge T \wedge X_m) \cdot (T \wedge f)] = t_{T, T \wedge X_m} \cdot (T \wedge f) \cdot ((-1)_T \wedge V \wedge T^{1+q+m}) = \\ &= (f \wedge T) \cdot t_{T, V \wedge T^{1+q+m}} \cdot ((-1)_T \wedge V \wedge T^{1+q+m}). \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} t_{T, V \wedge T^{1+q+m}} \cdot ((-1)_T \wedge V \wedge T^{1+q+m}) \cdot (t_{V, T \wedge \chi_{q+m, 1}}) \\ = t_{T, V \wedge T^{1+q+m}} \cdot (t_{V, T \wedge \chi_{q+m, 1}}) \cdot (V \wedge (-1)_T \wedge T^{1+q+m}) \\ = (V \wedge \tau_{1, 1+q+m+1}) \cdot (V \wedge (-1)_T \wedge T^{1+q+m}) = (V \wedge (-1)_T \wedge T^{1+q+m}) \cdot (V \wedge (-1)_T \wedge T^{1+q+m}) = 1 \end{aligned}$$

folgt schließlich:

$$[(t_{V, T \wedge T^{1+q+m}})^* \cdot (T \wedge -)] \cdot [\sigma_* \cdot t_{T, X_m^*} \cdot (V \wedge \chi_{q+m, 1})^*](f) = \sigma^{T \wedge X} \cdot (f \wedge T). \text{ Hier ist } \tau_{1, 1+q+m+1} \in \Sigma_{1+q+m+1} \text{ die Elementarpermutation, die 1 und } 1+q+m+1 \text{ vertauscht.}$$

• **Verträglichkeit mit der \mathcal{M} -Wirkung.** Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv, $\max(f(m)) = n$ und $\gamma \in \Sigma_n$ mit $\gamma|_m = f|_m^n$.

Zu (i): Für $1 + \gamma \in \Sigma_{1+m}$ gilt $(1 + \gamma)|_{1+n} = (1 + f)|_{1+m}^{1+n}$ und es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} [V \wedge T^{(q+1)+m}, (shX)_m] & \xlongequal{\quad} & [V \wedge T^{q+(1+m)}, X_{1+m}] \\ \downarrow \sigma_*^{n-m} \cdot (-\wedge T^{n-m}) & & \downarrow \sigma_*^{(n+1)-(m+1)} \cdot (-\wedge T^{(n+1)-(m+1)}) \\ [V \wedge T^{(q+1)+n}, (shX)_n] & \xlongequal{\quad} & [V \wedge T^{q+(1+n)}, X_{1+n}] \\ \downarrow (V \wedge |\gamma|_{T \wedge 1})^* \cdot \gamma_* & & \downarrow (V \wedge |1+\gamma|_{T \wedge 1})^* \cdot (1+\gamma)_* \\ [V \wedge T^{(q+1)+n}, (shX)_n] & \xlongequal{\quad} & [V \wedge T^{q+(1+n)}, X_{1+n}] \end{array}$$

denn $sgn(\gamma) = sgn(1 + \gamma)$. Die rechte Seite ist die \mathcal{M} -Wirkung auf $\pi_{r,q}^{\mathcal{L}}(X)(1)$.

Da die Abbildungen oben in (ii) und (iii) mit den definierenden Abbildungen der Colimites verträglich sind und levelerhaltend sind, kommutieren sie levelweise auch mit $\sigma_*^{n-m} \cdot (-\wedge T^{n-m})$. Damit muss

nur noch gezeigt werden, dass sie auch mit entsprechenden Abbildungen der Form $(V \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot \gamma_*$ kommutieren.

Zu (ii): Das Diagramm kommutiert (wegen der Natürlichkeit von ev und $t_{-, -}$):

$$\begin{array}{ccccccc} [V \wedge T^{q+m}, \Omega X_n] & \xrightarrow{-\wedge T} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, \Omega X_n \wedge T] & \xrightarrow{ev} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_n] & \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1, q+m})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, X_n] \\ \downarrow (1 \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot (\Omega \gamma)_* & & \downarrow (1 \wedge |\gamma|_T \wedge 1 \wedge T)^* \cdot (\Omega \gamma \wedge T)_* & & \downarrow (1 \wedge |\gamma|_T \wedge 1 \wedge T)^* \cdot \gamma_* & & \downarrow (1 \wedge T \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot \gamma_* \\ [V \wedge T^{q+m}, \Omega X_n] & \xrightarrow{-\wedge T} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, \Omega X_n \wedge T] & \xrightarrow{ev} & [V \wedge T^{q+m} \wedge T, X_n] & \xrightarrow{(V \wedge \chi_{1, q+m})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, X_n] \end{array}$$

In der letzten Spalte gilt: $1 \wedge T \wedge |\gamma|_T \wedge 1 = 1 \wedge |\gamma|_T \wedge 1$ (nach Def. 2.56). Mit $\alpha = ev \cdot (- \wedge T)$ folgt schließlich die Verträglichkeit mit der \mathcal{M} -Wirkung.

Zu (iii): Genauso kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} [V \wedge T^{q+m}, X_n] & \xrightarrow{(T \wedge -)} & [T \wedge V \wedge T^{q+m}, T \wedge X_n] & \xrightarrow{(t_{V, T \wedge 1})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, T \wedge X_n] \\ \downarrow (1 \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot \gamma_* & & \downarrow (T \wedge V \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot (T \wedge \gamma)_* & & \downarrow (V \wedge T \wedge |\gamma|_T \wedge 1)^* \cdot (T \wedge \gamma)_* \\ [V \wedge T^{q+m}, X_n] & \xrightarrow{(T \wedge -)} & [T \wedge V \wedge T^{q+m}, T \wedge X_n] & \xrightarrow{(t_{V, T \wedge 1})^*} & [V \wedge T \wedge T^{q+m}, T \wedge X_n] \end{array}$$

In der letzten Spalte gilt: $V \wedge T \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+m-1} = V \wedge |\gamma|_T \wedge T^{q+m}$ nach Def. 2.56. Damit ist auch der dritte Isomorphismus mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich.

• Die Verträglichkeit mit dem Vorzeichen von T ergibt sich aus genau den gleichen Gründen wie die Verträglichkeit mit \mathcal{M} -Wirkung, denn dort spielt das Vorzeichen die gleiche Rolle (siehe die letzten Diagramme). \square

Als Folgerung erhalten wir, dass einige Operationen auf symmetrischen Spektren mit der Semistabilität verträglich sind:

Corollar 5.17 ([Sch09, Lemma 6.25, S. 99]). *Es gebe den levelweise fasernder Ersetzungsfunktor J^Σ für $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$. Für ein symmetrisches T -Spektrum X in \mathcal{D} , sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- X ist semistabil
- $T \wedge X$ ist semistabil
- $\Omega J^\Sigma X$ ist semistabil
- $sh X$ ist semistabil

Beweis. Dies folgt aus der vorherigen Proposition 5.16. Es bleibt noch zu zeigen, dass ein zahmes \mathcal{M} -Model W genau dann triviale \mathcal{M} -Wirkung hat, wenn $W(1)$ triviale \mathcal{M} -Wirkung hat. Aber wenn die \mathcal{M} -Wirkung auf $W(1)$ trivial ist, hat W Filtrierung ≤ 1 und wegen Lemma 4.3 (iii) triviale \mathcal{M} -Wirkung. \square

Definition 5.18. *Sei X ein levelweise faserndes symmetrisches T -Spektrum. Die Komposition der \mathcal{M} -Isomorphismen (i) und (ii) in Prop. 5.16 wird mit $\alpha : \pi_q^V(RX) \cong \pi_q^V(X)(1)$ bezeichnet.*

Die nächste Proposition wird besonders im Beweis von Theorem 5.20 angewandt.

Proposition 5.19 ([Sch09, Lemma 6.22, S. 96]). *Sei X ein symmetrisches T -Spektrum. Die Wirkung des Zykloperators $d \in \mathcal{M}$ ist isomorph zur Wirkung von λ_X auf den stabilen Homotopiegruppen, d.h. es kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_q^V(X) & \xrightarrow{d_*} & \pi_q^V(X)(1) \\ \downarrow (-1)_T^q \cdot (T \wedge -) \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_{1+q}^V(T \wedge X) & \xrightarrow{\pi_{1+q}^V(\lambda_X)} & \pi_{1+q}^V(sh X) \end{array}$$

Falls X levelweise fasernd ist, so kommutieren für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Quadrate:

$$\begin{array}{ccc} \pi_q^V(X) \xrightarrow{d_*} \pi_q^V(X)(1) & \text{und} & \pi_q^V(R^n X) \xrightarrow{\alpha^n} \pi_q^V(X)(n) \\ \tilde{\lambda}_{X,*} \cdot (-1)_T^q \downarrow \cong & & \downarrow d_* \\ \pi_q^V(RX) \xrightarrow{\alpha} \pi_q^V(X)(1) & & \pi_q^V(R^{n+1} X) \xrightarrow{\alpha^{n+1}} [\pi_q^V(X)(n)](1) \end{array}$$

wobei die rechte vertikale Abbildung auf den unterliegenden Mengen die Wirkung von $d(n)$ auf $\pi_q^V(X)$ ist (siehe Def. 4.1).

Insbesondere ist die Wirkung von $d(n)$ auf $\pi_q^V(X)$ isomorph zu zur Abbildung $\pi_q^V(R^n \tilde{\lambda}_X)$.

Beweis. Sei $f : V \wedge T^{q+m} \rightarrow X_m$ ein Morphismus in $Ho(\mathcal{D})$.

Zum ersten Quadrat (vgl. die Definition 2.56 des Vorzeichens):

$$\begin{aligned} & [\lambda_{X,m*} \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1)^* \cdot [(t_{V,T} \wedge T^{q+m})^* \cdot (T \wedge -)](f)] \\ &= (\chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot t_{T,X_m}) \cdot (T \wedge f) \cdot (t_{V,T} \wedge T^{q+m}) \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1) \\ &= \chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot (f \wedge T) \cdot t_{T,V \wedge T^{q+m}} \cdot (t_{V,T} \wedge T^{q+m}) \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1) \\ &= \chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot (f \wedge T) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m}) \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1) \\ &= \chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot (f \wedge T) \cdot (V \wedge (-1)_T^{q+m} \wedge 1) \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1) \\ &= \chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot (f \wedge T) \cdot (V \wedge (-1)_T^m \wedge 1) \\ &= [\chi_{m,1*} \cdot (V \wedge (-1)_T^m \wedge 1)^* \cdot \sigma_m^X \cdot (- \wedge T)](f) = d_*(f). \end{aligned}$$

Beim zweiten Quadrat ergibt sich das Gleiche:

$$\begin{aligned} & [[(V \wedge \chi_{1,q+m})^* \cdot \alpha] \cdot \tilde{\lambda}_{X,m*} \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1)^*](f) \\ &= ev \cdot ([\tilde{\lambda}_{X,m} \cdot f \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1)] \wedge T) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m}) \\ &= \chi_{m,1} \cdot \sigma_m^X \cdot (f \wedge T) \cdot (V \wedge \chi_{1,q+m}) \cdot (V \wedge (-1)_T^q \wedge 1) = d_*(f). \end{aligned}$$

Das dritte Quadrat folgt aus dem zweiten Quadrat. Wie bei Schwede betrachten wir dazu das folgende Diagramm, dessen Teile alle kommutieren (da die Isomorphismen mit Vorzeichen vertauschen siehe Prop. 5.16):

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha^n & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \pi_q^V(\Omega^n sh^n X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{q+n}^V(sh^n X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_q^V(X) \\ & \downarrow (\Omega^n \tilde{\lambda}_{sh^n X})^* \cdot (-1)_T^q & \swarrow (\tilde{\lambda}_{sh^n X})^* \cdot (-1)_T^q & \searrow d_* & \downarrow d(n) \\ \pi_q^V(\Omega^n sh^n RX) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{q+n}^V(Rsh^n X) & \xrightarrow[\cong]{\alpha} & \pi_{q+n}^V(sh^n X) & \xrightarrow[\cong]{} & \pi_q^V(X) \\ & & \alpha^{n+1} & & \end{array}$$

Die letzte Aussage gilt, da wegen Lemma 5.5 die Morphismen $\tilde{\lambda}_{sh^n X}$ und $sh^n \tilde{\lambda}_X$ in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ zueinander isomorph sind. \square

5.4 Das verallgemeinerte Theorem und Kriterien für Semistabilität

Es gelten die Voraussetzung des Abschnittes 3.4.4. In diesem Abschnitt wird die Proposition 5.7 (mit zusätzlichen Annahmen) erweitert und gleichzeitig damit Theorem 1.1 verallgemeinert.

Theorem 5.20 (verallgemeinert: [Sch09, Ch. I, Theorem 6.24]). *Sei $(\mathcal{D}, \wedge, S^0)$ eine punktierte symmetrisch monoidale Modellkategorie mit einem cofasernden Objekt T , so dass $- \wedge T$ schwache Äquivalenzen erhält und T ein Vorzeichen hat. Sei $i : sSet_* \rightarrow \mathcal{D}$ ein monoidaler linker Quillen-Funktor mit Adjungiertem j . Sei \mathcal{B} eine Klasse cofasernder Objekte in \mathcal{D} . Weiterhin möge gelten, dass fasernde Objekte in \mathcal{D} unter sequentiellen Colimites abgeschlossen sind, und die Funktoren j , $Hom(T, -)$ und $Hom(A, -)$ für alle $A \in \mathcal{B}$ sequentielle Colimites erhalten.*

Dann sind für jedes symmetrische T -Spektrum X in \mathcal{D} äquivalent:

- (i) X ist semistabil (siehe Def. 5.14).
- (ii) Der Zykeloperator d (Def. 4.1) wirkt auf allen stabilen Homotopiegruppen von X surjektiv.
- (iii) Die Abbildung $\lambda_X : T \wedge X \rightarrow sh X$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.

Falls für die Klasse $\{\pi_q^V; q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}\}$ von Funktoren von $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ in die \mathcal{M} -Mengen die Voraussetzungen von Proposition 4.8 gelten, dann ist (i) auch äquivalent zu:

(i'): Die Abbildung $c_X : \pi_q^V(X) \rightarrow \tilde{\pi}_q^V(X)$ (Def. 4.8) ist für alle $q \in \mathbb{Z}, V \in \mathcal{B}$ eine Bijektion.

Falls X levelweise fasernd ist, sind die Bedingungen (i) – (iii) weiter äquivalent zu:

(iv) Die Abbildung $\tilde{\lambda}_X : X \rightarrow RX$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.

(v) Die Abbildung $\tilde{\lambda}_X^\infty : X \rightarrow R^\infty X$ ist eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.

(vi) Das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ ist semistabil.

Falls zusätzlich die folgenden Bedingungen gelten:

- die projektive levelweise Modellstruktur in $Sp(\mathcal{D}, T)$ existiert und die Bedingung (a) in Proposition 5.7 gilt,
- die projektiv levelweise Modellstruktur auf $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ existiert und damit insbesondere eine levelweise fasernde Ersetzung $1 \rightarrow J^\Sigma$, und
- $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenzen stimmen mit stabilen Äquivalenzen in $Sp(\mathcal{D}, T)$ überein (siehe 3.21),

so sind die obigen Bedingungen (i) – (iii) zu (viii) äquivalent, und falls X zusätzlich levelweise fasernd ist, so sind alle obigen Bedingungen zu (vii) äquivalent:

(vii) Das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ ist ein Ω -Spektrum.

(viii) Es gibt eine Abbildung von symmetrischen Spektren von X zu einem Ω -Spektrum, die eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz ist.

Zusätzlich gelten immer die Implikationen (viii) \Rightarrow (i) und (vii) \Rightarrow (vi).

Beweis. • (i) \Leftrightarrow (ii) Nach Definition folgt (ii) aus (i). Wegen Zahnheit (siehe Lemma 4.6 (i)) folgt mit Lemma 4.3 (iii) auch die umgekehrte Richtung.

- (ii) \Leftrightarrow (iii) Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus dem ersten kommutativen Diagramm in Proposition 5.19.
- (i) \Leftrightarrow (i') folgt direkt aus Proposition 4.8 und Definition 5.14.
- (viii) \Rightarrow (ii) Für Ω -Spektren Z ist $\tilde{\lambda}_Z$ eine Level-Äquivalenz und daher eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz. Mit (iv) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) folgt dann, dass Ω -Spektren semistabil sind. Nach Lemma 5.15 folgt, dass X semistabil ist.

- (vii) \Rightarrow (vi): Dass Ω -Spektren semistabil sind, wurde in (viii) \Rightarrow (ii) gezeigt.

Jetzt nehmen wir auch an, dass X levelweise fasernd ist.

- (ii) \Leftrightarrow (iv) Die Bedingung (iv) ist nach dem zweiten kommutativen Quadrat in Proposition 5.19 äquivalent dazu, dass der Zykeloperator d auf allen $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabilen Homotopiegruppen von X bijektiv wirkt. Nach (i) \Leftrightarrow (ii) ist dies äquivalent zu (ii) äquivalent.

- (iv) \Rightarrow (v): Da $\tilde{\lambda}_X$ eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz ist, sind dies auch $R^n \tilde{\lambda}_X, n \in \mathbb{N}_0$, denn Ω und sh erhalten nach Proposition 5.16 (i), (ii) $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenzen. Wegen Corollar 3.49 ist die Abbildung $\pi_q^V(\tilde{\lambda}_X^\infty)$ zur Inklusion $\pi_q^V(X) \xrightarrow{incl_0} \text{colim}_{n \geq 0} \pi_q^V(R^n X)$ isomorph. Aber die Abbildungen $\pi_q^V(R^n \tilde{\lambda}_X), n \in \mathbb{N}_0$ sind alle Isomorphismen. Also ist auch die Inklusion ein Isomorphismus und damit $\tilde{\lambda}_X^\infty$ eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz.

- (v) \Rightarrow (ii): Die Abbildung $\pi_q^V(R^n \tilde{\lambda}_X), n \in \mathbb{N}_0$ ist injektiv, denn wegen Proposition 5.19 sind diese isomorph zu der Wirkung von $d(n)$ auf $\pi_q^V(X)$, welche wiederum nach Lemma 4.3 und 4.6 injektiv ist. Die Inklusion $\pi_q^V(X) \xrightarrow{incl} \text{colim}_{n \geq 0} \pi_q^V(R^n X)$ ist ein Isomorphismus, denn sie ist zu $\pi_q^V(\tilde{\lambda}_X^\infty)$ (Corollar 3.49) isomorph. Da alle Abbildungen des sequentiellen Diagramms $\pi_q^V(R^\bullet X)$ injektiv sind, müssen diese Abbildungen wegen Letzterem auch surjektiv sein. Dementsprechend ist die Wirkung des Zykeloperators d auf $\pi_q^V(X)$ surjektiv, also gilt Bedingung (ii).

- $(iv) \Rightarrow (vi)$: Da (iv) die Bedingungen (v) und (ii) , also auch (i) , impliziert, ist wegen Lemma 5.15 das symmetrische Spektrum $R^\infty X$ semistabil.
- $(vi) \Rightarrow (i)$: Wie oben $((v) \Rightarrow (ii))$ gesehen ist die Abbildung $\pi_q^V(\tilde{\lambda}_X^\infty) : \pi_q^V(X) \rightarrow \pi_q^V(R^\infty X)$ injektiv und mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich. Da die \mathcal{M} -Wirkung von $\pi_q^V(R^\infty X)$ trivial ist, ist deren Einschränkung auf $\pi_q^V(X)$ auch trivial.

Nun seien die Voraussetzungen für letzten den Teil des Theorems erfüllt.

- $(iv) \Rightarrow (vii)$: Nach Voraussetzung ist $\tilde{\lambda}_X$ eine stabile Äquivalenz in $Sp(\mathcal{D}, T)$. Aus der Implikation $(ii) \Rightarrow (iv)$ in Proposition 5.7 folgt dann die Behauptung.
- $(i) \Rightarrow (viii)$ Wir haben eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz $X \rightarrow J^\Sigma X =: Y$ in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$. Nach Lemma 5.15 ist $J^\Sigma X$ semistabil und somit folgt aus den Implikationen $(i) \Rightarrow (v)$, (vii) , dass $\tilde{\lambda}_Y^\infty : Y \rightarrow R^\infty Y$ eine $\pi^{\mathcal{B}}$ -stabile Äquivalenz und $R^\infty Y$ ein Ω -Spektrum. □

Beispiel Für Einhängungsspektren $\Sigma^\infty L$ (Kap. 3) ist $\lambda_{\Sigma^\infty L}$ ein Isomorphismus, denn levelweise ist es schon ein Isomorphismus, da die Strukturabbildungen σ Identitäten sind. Also sind Einhängungsspektren semistabil.

Das obige Theorem 5.20 ist auf das Beispiel der motivisch abgeschlossen-flasquen Modellkategorie $M^{cm}(S)$ zugeschnitten worden:

Proposition 5.21. *Alle Voraussetzung bis auf die vor der Aussage (i') von Theorem 5.20 gelten für $\mathcal{D} = M^{cm}(S)$, $T = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{B} = \{S^r \wedge \mathbb{G}_m^s \wedge U_+ | r, s \geq 0, U \in Sm/S\}$.*

Beweis. Wir wissen, dass die Voraussetzung des Abschnitts 3.4.4 schon gelten. Nach Abschnitt 2.5.3 hat \mathbb{P}^1 ein Vorzeichen. Die Voraussetzung über die fasernden Objekte folgt aus Prop. 2.49 und Thm. 2.19. Aus Lemma 3.41 folgt, dass \mathbb{P}^1 und alle Objekte in \mathcal{B} Hom-endlich sind. Von den letzten Bedingungen gelten die ersten beiden, da \mathcal{D} fast endlich erzeugt ist (Prop. 2.49 und Thm. 3.29), und wegen den Theoremen 3.24 und 3.22. Die $\pi^{\mathcal{B}}$ -Äquivalenzen stimmen wegen Cor. 3.43 mit den stabilen Äquivalenzen von $Sp(\mathcal{D}, T)$ überein. □

Unter gewissen Voraussetzungen ist das Bilden eines sequentiellen Colimites mit der Semistabilität verträglich:

Proposition 5.22. *Sei X^\bullet ein sequentielles Diagramm in $Sp^\Sigma(\mathcal{D}, T)$ und mögen die Voraussetzungen von Corollar 3.49 gelten. Falls alle symmetrischen Spektren X^n , $n \in \mathbb{N}_0$ semistabil sind, so auch $colim X^\bullet$.*

Beweis. Nach Corollar 3.49 haben wir einen Isomorphismus: $colim \pi_q^V(X^\bullet) \rightarrow \pi_q^V(colim X^\bullet)$. Nun sind die Abbildungen $\pi_q^V(X^n) \xrightarrow{incl_*} \pi_q^V(colim X^\bullet)$ mit der \mathcal{M} -Wirkung verträglich und die Mengen $\pi_q^V(X^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ haben triviale \mathcal{M} -Wirkungen. Da Colimites von Identitäten sequentieller Diagramme Identitäten sind, operiert \mathcal{M} auch auf $\pi_q^V(colim X^\bullet)$ durch Identitäten. Also ist auch $colim X^\bullet$ semistabil. □

In der Situation $\mathcal{D} = Top_*$, $T = S^1$ gibt es einige Kriterien für Semistabilität sowie einige besondere Klassen von semistabilen Spektren ([Sch09, Ch. I, Example 6.27]), wie die orthogonalen Spektren, also Spektren, auf denen die orthogonale Gruppen wirken (siehe [Sch09, Ch. I, Def. 9.2]). Zu den orthogonalen Spektren gehören die Thomspektren und die Einhängungsspektren. Entsprechende Kriterien gibt es auch für verallgemeinerte stabile Homotopiegruppen:

Proposition 5.23 ([Sch09, Ch. I, Prop. 6.26]). *Sei X ein symmetrisches T -Spektrum. X ist semistabil, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:*

1. Für jedes $q \in \mathbb{Z}$ und $V \in \mathcal{B}$ gibt es jeweils ein $l \geq 0$, so dass die Inklusionsabbildung $[V \wedge T^{q+l}, X_l] \rightarrow \pi_q^V(X)$ surjektiv ist. Dies gilt insbesondere, wenn die stabilen Homotopiegruppen sich stabilisieren, also $[V \wedge T^{q+n}, X_n] \rightarrow [V \wedge T^{q+n+1}, X_{n+1}]$ Isomorphismen für $n \gg 0$ sind.
2. Die Wirkungen der geraden Permutationen auf X_l induzieren Identitäten in der Homotopiekategorie $Ho(\mathcal{D})$.
3. Die stabilen Homotopiegruppen $\pi_q^V(X)$ sind endlich erzeugt als abelsche Gruppen, für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $V \in \mathcal{B}$.

Beweis. 1. Nach Lemma 4.6 ist die Filtrierung der Elemente von $\pi_q^V(X)$ beschränkt. Also ist nach Lemma 4.3 (ii) die \mathcal{M} -Wirkung auf $\pi_q^V(X)$ trivial.

2. Wir zeigen, dass der Zykeloperator d auf $\pi_q^V(X)$ als Identität wirkt. Entscheidend ist die folgende Beobachtung: für gerade $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Abbildung

$$[V \wedge T^{q+n+1}, T_{n+1}] \xrightarrow{\chi_{n,1*}(V \wedge |\chi_{n,1}|_T \wedge 1)^*} [V \wedge T^{q+n+1}, T_{n+1}]$$

die Identität ist. Denn $\chi_{n,1}$ ist eine gerade Permutation und somit $|\chi_{n,1}|_T = 1$ (Def. 2.56), und die Abbildung $\chi_{n,1*}$ darin nach Voraussetzung die Identität.

Ein Element in $\pi_q^V(X)$ wird stets (nach Stabilisierung) von einem $f \in [V \wedge T^{q+n}, T_n]$ mit geraden $n \in \mathbb{N}_0$ repräsentiert. Wegen dieser Bemerkung ist: $d[f] = [\chi_{n,1*}(V \wedge |\chi_{n,1}|_T \wedge 1)^* \cdot \iota_*(f)] = [\iota_*(f)] = [f]$. Also wirkt d als Identität. Nach Lemma 4.3 ist die \mathcal{M} -Wirkung auf $\pi_q^V(X)$ trivial und daher X semistabil.

3. Dies folgt wegen der Zahmheit von $\pi_q^V(X)$ (Lemma 4.6) aus Lemma 4.3 (iv). □

Bemerkung In [RSØ, Prop. 3.2] wird das gleiche Kriterium wie in Prop. 5.23-2. angegeben.

Speziell in der motivischen stabilen Homotopiekategorie gibt es symmetrische Spektren, deren Objekte (ähnlich wie bei orthogonalen Spektren) eine Wirkung der allgemeinen linearen Gruppe besitzen. Falls diese mit der Wirkung der symmetrischen Gruppe verträglich ist, sind diese symmetrischen Spektren semistabil:

Corollar 5.24. *Sei E ein symmetrisches T -Spektrum. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gebe es ein Objekt E'_n in $M.(S)$ mit Σ_n -Wirkung, ein Zickzack aus Σ_n -äquivarianten motivisch schwachen Äquivalenzen zwischen E_n und E'_n und eine Abbildung in $M.(S)$:*

$$h.(GL_{n,S}) \wedge E'_n \rightarrow E'_n,$$

so dass die durch Permutationsmatrizen induzierten Endomorphismen auf E'_n mit der Σ_n -Wirkung auf E'_n übereinstimmt.

Dann ist E semistabil.

Beweis. Setze $\mathcal{D} = M^{cm}(S)$. Sei $\tau \in \Sigma_n$ eine gerade Permutation und P_τ die zugehörige Permutationsmatrix. Nach Lemma 2.67 wissen wir, dass die von P_τ und id induzierten Endomorphismen auf E'_n in $Ho(\mathcal{D})$ übereinstimmen. Gleichzeitig ist nach Voraussetzung der von id induzierte Endomorphismus die Identität. Damit wirken die geraden Permutationen auf E'_n in $Ho(\mathcal{D})$ als Identität, denn die Σ_n -Wirkung auf E_n ist in $Ho(\mathcal{D})$ konjugiert zur Σ_n -Wirkung auf E'_n . Nach Proposition 5.23 (ii) folgt dann die Semistabilität. □

6 Beispiele in der motivischen Homotopietheorie

In diesem Kapitel werden zwei Beispiele für semistabile symmetrische Spektren in der motivischen Homotopietheorie untersucht.

6.1 Das motivische Eilenberg-Mac Lane Spektrum

Das motivische Eilenberg-Mac Lane Spektrum wird in [DRØ, Example 3.4] als Auswertung eines motivischen Funktors (siehe [DRØ, Abschnitt 3]) definiert. Nach [DRØ, Lemma 4.6] repräsentiert dieses motivische Kohomologie mit ganzen Koeffizienten.

Zunächst sei $H : M.(S) \rightarrow M.(S)$ ein Funktor, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt natürliche Abbildungen $H_{A,B} : Hom(A, B) \rightarrow Hom(H(A), H(B))$, die kompatibel mit den Kompositionsabbildungen und der Identität auf Hom sind und dessen Einschränkung auf S und den 0-Simplizes die Abbildung von H auf Morphismen ergibt.
2. Der Funktor H schickt motivisch schwache Äquivalenzen zwischen projektiv cofasernden Objekten (siehe Abschnitt 2.4 und [DRØ, Abschnitt 2.1]) auf motivisch schwache Äquivalenzen.

Diese Eigenschaften reichen aus, um ein semistabiles symmetrisches Spektrum zu definieren (siehe unten). Um allerdings das motivische Eilenberg-Mac Lane aus dieser Konstruktion zu erhalten, muss der Funktor nach der Definition in [DRØ, Example 3.4] als $H = u \circ \mathbb{Z}_{tr}$ gewählt werden (siehe [DRØ, S. 524] für die zweite Eigenschaft).

Sei $i_1 : S \rightarrow \mathbb{G}_m S$ die Abbildung in Sm/S , die durch $Spec(\mathbb{Z}) \xrightarrow{T \mapsto 1} \mathbb{G}_m \mathbb{Z}$ induziert wird. Wir haben dann einen Monomorphismus $h.(i_1) \wedge S^1 : h.(S) \wedge S^1 \rightarrow h.(\mathbb{G}_m S) \wedge S^1$. Nach Lemma 2.54 gibt es eine motivisch schwache Äquivalenz $\tilde{T} := [h.(\mathbb{G}_m S) \wedge S^1] / [h.(S) \wedge S^1] \rightarrow \mathbb{G}_m \wedge S^1$ und \tilde{T} ist projektiv cofasernd, wobei hier \mathbb{G}_m der punktierte motivische Raum $(h(\mathbb{G}_m S), h(i_1)) \cong h.(\mathbb{G}_m S) / h.(S)$ ist (siehe auch Def. 2.60). Der Funktor H wird nun an Potenzen des Objektes \tilde{T} ausgewertet:

Definition 6.1. Das motivische Eilenberg-Mac Lane Spektrum \mathbb{H} ist das symmetrische \tilde{T} -Spektrum, das aus den Objekten $\mathbb{H}_n := H(\tilde{T}^n)$ besteht, mit Σ_n -Wirkung induziert durch die Permutationswirkung auf \tilde{T}^n , und dessen Strukturabbildungen $\mathbb{H}_n \wedge \tilde{T} \rightarrow \mathbb{H}_{n+1}$ zur folgenden Abbildung adjungiert sind:

$$\tilde{T} \xrightarrow{\text{Einheit}} Hom(\tilde{T}^n, \tilde{T}^n \wedge \tilde{T}) \xrightarrow{H_{\tilde{T}^n, \tilde{T}^n \wedge \tilde{T}}} Hom(H(\tilde{T}^n), H(\tilde{T}^n \wedge \tilde{T}))$$

Bemerkung Die Kompositionen der Strukturabbildungen, $\sigma_n^{\mathbb{H}l} : \mathbb{H}_n \wedge \tilde{T}^l \rightarrow \mathbb{H}_{n+l}$, sind adjungiert zu $\tilde{T}^l \xrightarrow{\text{Einheit}} Hom(\tilde{T}^n, \tilde{T}^n \wedge \tilde{T}^l) \xrightarrow{H} Hom(H(\tilde{T}^n), H(\tilde{T}^n \wedge \tilde{T}^l))$, denn H ist mit Kompositionen auf Hom verträglich, und damit $\Sigma_n \times \Sigma_l$ -äquivalent.

Die folgenden Lemmata zeigen, dass die Voraussetzung des Corollars 5.24 erfüllt sind, welches dann Semistabilität impliziert.

Lemma 6.2. Zwischen den projektiv cofasernden punktierten motivischen Räumen $\tilde{T}^{\wedge n}$ und $T_2^n := h.(\mathbb{A}_S^n) / h.((\mathbb{A}^n - 0)_S)$ gibt es ein Zickzack von Σ_n -äquivalenten motivisch schwachen Äquivalenzen zwischen projektiv cofasernden Objekten.

Beweis. Nach den Lemmata 2.54, 2.63 sowie 2.65 und Proposition 2.53 gibt es ein Zickzack von Σ_n -äquivalenten motivisch schwachen Äquivalenzen:

$$h.(\mathbb{A}_S^n) / h.((\mathbb{A}^n - 0)_S) \xrightarrow{\sim} h.(\mathbb{A}_S^n) / h.((\mathbb{A}^n - 0)_S) \xleftarrow{\sim} (\mathbb{A}^1 / \mathbb{G}_m)^{\wedge n} \simeq (\mathbb{G}_m \wedge S^1)^{\wedge n} \xleftarrow{\sim} \tilde{T}^n.$$

Wir können dieses Zickzack funktoriell projektiv cofasernd ersetzen und erhalten dann das gewünschte Zickzack. Wegen der Funktorialität ist das neue Zickzack auch Σ_n -äquivalent. \square

Lemma 6.3. \mathbb{H}_n ist Σ_n -äquivalent motivisch schwach äquivalent (Def. 2.4) zu $H(h.(\mathbb{A}_S^n) / h.((\mathbb{A}^n - 0)_S))$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 6.2 zusammen mit der zweiten oben angegebenen Eigenschaft von H . \square

Lemma 6.4. • Es gibt eine Abbildung $h.(GL_n S) \wedge T_2^n \rightarrow T_2^n$, die die Σ_n -Wirkung auf T_2^n fortsetzt.

• Es gibt eine Abbildung $h.(GL_n S) \wedge H(T_2^n) \rightarrow H(T_2^n)$, die die Σ_n -Wirkung auf $H(T_2^n)$ fortsetzt.

Beweis. • Wir haben ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} h.(GL_n S) \wedge h.((\mathbb{A}^n - 0)_S) & \xrightarrow{\mu} & h.((\mathbb{A}^n - 0)_S) \\ \downarrow 1 \wedge h.(incl) & & \downarrow h.(incl) \\ h.(GL_n S) \wedge h.(\mathbb{A}_S^n) & \xrightarrow{\mu} & h.(\mathbb{A}_S^n) \end{array}$$

wobei die Abbildungen μ die Σ_n -Wirkung fortsetzen. Da Smashen mit Colimites vertauscht, induziert dieses Diagramm eine Abbildung

$h.(GL_n S) \wedge T_2^n \rightarrow T_2^n$, die die Σ_n -Wirkung auf T_2^n fortsetzt.

• Die Abbildung aus dem ersten Teil ist adjungiert zu einer Abbildung $h.(GL_n S) \rightarrow Hom(T_2^n, T_2^n)$, deren Komposition mit $H_{T_2^n, T_2^n}$ wiederum adjungiert zu einer Abbildung $h.(GL_n S) \wedge H(T_2^n) \rightarrow H(T_2^n)$ ist. Diese setzt die Σ_n -Wirkung fort, denn $H_{T_2^n, T_2^n}(S)$ ist die Abbildung auf den Morphismen $M.(S)(T_2^n, T_2^n) \rightarrow M.(S)(H(T_2^n), H(T_2^n))$ und die Σ_n -Wirkung auf $H(T_2^n)$ wird durch diese von der auf T_2^n induziert. \square

Corollar 6.5. Das symmetrische motivische Eilenberg MacLane Spektrum ist semistabil.

Beweis. Das folgt aus Lemma 6.3 und 6.4 und Proposition 5.24. \square

6.2 Das algebraische Cobordismus-Spektrum

Das algebraische Cobordismus-Spektrum wird in [Vo2, Abschnitt 6.3] definiert. Jedoch erst in [PPR2, Abschnitt 2.1] wird ein symmetrisches \mathbb{P}^1 -Spektrum definiert, das diesem entspricht. Wir wollen hier dieses definieren und zeigen, dass es semistabil ist.

6.2.1 Vektorbündel und Thom-Räume

Um das algebraische Cobordismus-Spektrum zu definieren, werden Vektorbündel und deren Thom-Räume benötigt. Dieses werden jetzt in den folgenden Definitionen eingeführt. Zunächst werden Objekte mit Zusatzstruktur betrachtet:

Definition 6.6. Sei \mathcal{C} eine lokal kleine Kategorie (d.h. eine Kategorie mit Hom-Mengen, z. B. Sch/X).

- Sei $F : \mathcal{S} \rightarrow Set$ eine Einbettung (injektiv auf Objekten und Morphismen). Ein F -Objekt in \mathcal{C} ist ein Objekt A in \mathcal{C} zusammen mit einem Funktor $A_F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$, so dass $F \circ A_F = h(A)$ gilt, wobei $h(A)$ der Funktor $\mathcal{C}^{op} \rightarrow Set, Y \rightarrow \mathcal{C}(Y, A)$ ist.
Ein Morphismus $(A, A_F) \rightarrow (A', A'_F)$ von F -Objekten in \mathcal{C} ist ein Morphismus $f : A \rightarrow A'$ in \mathcal{C} , so dass für alle $Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung $\mathcal{C}(Y, f)$ von Mengen Bild eines Morphismus in \mathcal{S} unter F ist.
- Falls F der Vergissfunktor von Gruppen, abelschen Gruppen oder Ringen in Mengen ist, so ist eine Gruppe, abelsche Gruppe bzw. Ring in \mathcal{C} ein F -Objekt in \mathcal{C} .
- Sei R ein Ring in \mathcal{C} . Dann besteht ein R -Modul in \mathcal{C} aus einer abelschen Gruppe M in \mathcal{C} zusammen mit natürlicher Abbildung $m : \mathcal{C}(-, R) \times \mathcal{C}(-, M) \rightarrow \mathcal{C}(-, M)$, die für jedes $Y \in \mathcal{C}$ eine $\mathcal{C}(Y, R)$ -Modulstruktur auf der abelschen Gruppe $\mathcal{C}(Y, M)$ definieren. Ein Morphismus $(M, m) \rightarrow (M', m')$ von R -Moduln in \mathcal{C} ist ein Morphismus $f : M \rightarrow M'$ in \mathcal{C} , so dass für alle $Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung $\mathcal{C}(Y, f)$ ein $\mathcal{C}(Y, R)$ -Modulhomomorphismus ist.

Bemerkung Sei \mathcal{C} ein lokal kleine Kategorie mit endlichen Produkten und terminalen Objekt. Die Struktur von Gruppen, Ringen und Moduln in \mathcal{C} anzugeben, ist nach dem Yoneda-Lemma äquivalent dazu, entsprechend Additions- bzw. Multiplikationsmorphisme $A \times A \rightarrow A, R \times M \rightarrow M$ und Null- bzw. Eins-Morphisme $* \rightarrow A$ anzugeben, so dass die entsprechenden Diagramme kommutieren.

Beispiel • Das X -Schema $\mathbb{A}_X^n := \mathbb{A}^n \times X$ hat die Struktur einer abelschen Gruppe, denn für ein $Y \in Sch/X$ gilt: $(Sch/X)(Y, \mathbb{A}_X^n) \cong \mathcal{O}_Y(Y)^n$.

- Insbesondere hat für $n = 1$ das X -Schema \mathbb{A}_X^1 die Struktur eines Ringes.
- Schließlich ist \mathbb{A}_X^n ein \mathbb{A}_X^1 -Modul in Sch/X .
- Das Schema GL_n hat eine Gruppenstruktur in Sch .
- Ein Endomorphismus des Ringes \mathbb{A}_X^1 entspricht einem Polynom $P \in \mathcal{O}_X(X)[T]$ mit $P(T_1 + T_2) = P(T_1) + P(T_2)$ und $P(T_1 \cdot T_2) = P(T_1) \cdot P(T_2)$.
- Ein Morphismus $\mathbb{A}_X^m \rightarrow \mathbb{A}_X^n$ von \mathbb{A}_X^1 -Moduln entspricht n Polynomen $P_i \in \mathcal{O}_X(X)[T_1, \dots, T_m], i = 1, \dots, n$, so dass $P_i(T_1 + T'_1, \dots, T_m + T'_m) = P_i(T_1, \dots, T_m) + P_i(T'_1, \dots, T'_m)$ und $TP_i(T_1, \dots, T_m) = P_i(TT_1, \dots, TT_m)$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.

Bemerkung Falls E ein \mathbb{A}_X^1 -Modul in Sch/X ist und $U \rightarrow X$ ein Morphismus von Schemata, so hat das U -Schema $E \times_X U$ eine induzierte \mathbb{A}_U^1 -Modulstruktur, denn $(Sch/U)(Y, E \times_X U) \cong (Sch/X)(Y, E)$. Diese Zuordnung ist funktoriell.

Definition 6.7 ([Mo2, S. 4]). Sei X ein Schema. Ein Vektorbündel über X ist ein Schema-Morphismus $\xi : E \rightarrow X$ zusammen mit einer Struktur eines \mathbb{A}_X^1 -Moduls auf ξ in Sch/X , so dass es eine offene Überdeckung $\{U_i | i \in I\}$ von X gibt und für jedes $i \in I$ Isomorphismen $\psi_i : \xi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_{U_i}^{n_i}$ von $\mathbb{A}_{U_i}^1$ -Moduln in Sch/U_i gibt.

Beispiel • Die Identität $1_X : X \rightarrow X$ ist ein Vektorbündel über X , denn 1_X ist das terminale Objekt in Sch/X .

- Falls $\xi_i : V_i \rightarrow X_i, i = 0, 1$ zwei Vektorbündel sind und X_i S -Schemata, dann hat $\xi_0 \times_S \xi_1 : V_0 \times_S V_1 \rightarrow X_0 \times_S X_1$ eine induzierte Vektorbündelstruktur.

Lemma-Definition 6.8. Sei $\xi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel.

- Der Nullschnitt $z(\xi) : X \rightarrow E$ von ξ ist der Nullmorphimus $X \rightarrow E$ des abelschen Gruppenobjektes E in Sch/X . Er ist eine abgeschlossene Immersion.
- Dann ist das Bild von $z(\xi)$ ein abgeschlossenes Unterschema von E und dessen Komplement $U(\xi) := E - Im z(\xi)$ ein offenes Unterschema in E .
- Sei X jetzt auch S -Schema. Der Thom-Raum $Th(\xi)$ von ξ ist der punktierte motivische Raum: $a[h.(E)/(h.(U(\xi)))]$ (siehe Lemma 2.51).

Beweis. Wir müssen noch zeigen, dass $z(\xi)$ eine abgeschlossene Immersion ist. Es reicht dies für die Pullbacks von $z(\xi)$ entlang $\{\xi^{-1}(U_i) \subseteq E\}$ zu überprüfen, wobei $\{U_i\}$ die offene Überdeckung von X aus Def. 6.7 ist. Diese sind aber die Nullmorphimen $z(\xi|_{U_i})$ von $\xi|_{U_i}$. Da der Isomorphismus $\psi_i : \xi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_{U_i}^{n_i}$ Nullmorphimen auf Nullmorphimen abbildet, genügt es zu zeigen, dass der Nullmorphimus von $\mathbb{A}_{U_i}^{n_i}$ eine abgeschlossene Immersion ist. Dieser ist aber $(Spec \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{n_i}) \times id_{U_i}$ und damit eine abgeschlossene Immersion. \square

Aus der Definition des Thom-Raums ergibt sich:

Lemma 6.9. Seien $\xi : E \rightarrow X$ und $\xi' : E' \rightarrow X'$ zwei Vektorbündel und

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi' \\ X & \xrightarrow{g} & X' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in Sch/S , so dass f die offene Menge $U(\xi)$ auf $U(\xi')$ abbildet. Dann erhalten wir eine Abbildungen $Th(\xi) \rightarrow Th(\xi')$ in $M.(S)$. Diese Zuordnung ist funktoriell.

Bemerkung Falls $\xi : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel ist und X ein S -Schema (insbesondere $S = Spec \mathbb{Z}$), so hat für jedes S -Schema A auch $A \times_S \xi : A \times_S E \rightarrow A \times_S X$ eine induzierte Vektorbündelstruktur. Außerdem hat die Projektion $A \times_S \xi \rightarrow \xi$ die Eigenschaft des Diagramms aus Lemma 6.9.

Folgendes Lemma wird später für die GL_n -Wirkung gebraucht:

Lemma 6.10. 1. Sei A ein S -Schema. Es ist $U(1_A) = \emptyset$. Es gibt eine natürliche motivisch schwache Äquivalenz in $M.(S)$: $h.(A) \rightarrow Th(1_A)$.

2. Seien X, X' zwei S -Schemata und $\xi : V \rightarrow X, \xi' : V' \rightarrow X'$ Vektorbündel über ihnen. Es ist $U(\xi \times_S \xi') = pr_1^{-1}(U(\xi)) \cup pr_2^{-1}(U(\xi'))$ (wobei pr_i die beiden Projektionen sind). Es gibt eine natürliche motivisch schwache Äquivalenz in $M.(S)$: $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$, die assoziativ und mit dem Vertauschen von ξ und ξ' verträglich ist. Die Komposition $h.(A) \wedge Th(\xi) \rightarrow Th(1_A) \wedge Th(\xi) \rightarrow Th(1_A \times_S \xi)$ werde mit $Th_{A,\xi}$ bezeichnet. Außerdem kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Th(\xi) & & \\ \downarrow \cong & \searrow^{Th(\cong)} & \\ h.(S) \wedge Th(\xi) & \xrightarrow{Th_{S,\xi}} & Th(1_S \times_S \xi) \end{array}$$

Beweis. 1. Der Nullschnitt von 1_A ist 1_A und damit $U(1_A) = A - A = \emptyset$.

Die geforderte Abbildung ist $h.(A) = h.(A)/\ast \rightarrow h.(A)/h.(\emptyset) \rightarrow Th(1_A)$. Die erste Abbildung in der Kompositon ist eine motivisch schwache Äquivalenz, da $\ast \rightarrow h.(\emptyset)$ eine motivisch schwache Äquivalenz ist und $M^{cm}(S)$ links-eigentlich. Wegen Lemma 2.52 ist auch die zweite Abbildung eine schwache Äquivalenz.

2. Die erste Aussage folgt aus $z(\xi \times_S \xi') = z(\xi) \times_S z(\xi')$ und $Im(z(\xi) \times_S z(\xi')) = pr_1^{-1}(Im z(\xi)) \cap pr_2^{-1}(Im z(\xi'))$.

Für die zweite Aussage haben wir zunächst:

$$Th(\xi) \wedge Th(\xi') \xrightarrow{\sim} a(a[h.(V)/h.(U(\xi))] \wedge a[h.(V')/h.(U(\xi'))]) \cong a([h.(V)/h.(U(\xi))] \wedge [h.(V')/h.(U(\xi'))])$$

(was auf Nisnevich-Halmen getestet werden kann, da sie mit Smash-Produkten vertauschen, siehe [Mo, Lemma 2.1.12]) und

$$[h(V) \times h(V')]/[h(U(\xi)) \times h(V') \amalg h(V) \times h(U(\xi'))] \cong h(V \times_S V')/[h(U(\xi) \times_S V') \amalg h(V \times_S U(\xi'))].$$

Die beiden offenen Immersionen von $U(\xi) \times_S V'$ und $V \times_S U(\xi')$ nach $V \times_S V'$ bilden eine offene Überdeckung. Damit ist $M.(S)(h.(U(\xi \times_S \xi')), \mathcal{F}) \rightarrow M.(S)(h.(U(\xi) \times_S V') \vee h.(V \times_S U(\xi')), \mathcal{F})$ für alle $\mathcal{F} \in sShv.(S)$ injektiv. Also ist

$a(h.(V \times_S V')/[h.(U(\xi) \times_S V') \vee h.(V \times_S U(\xi'))]) \rightarrow a(h.(V \times_S V')/h.(U(\xi \times_S \xi'))) = Th(\xi \times_S \xi')$ ein Isomorphismus. Die Komposition ergibt dann die gewünschte Abbildung.

Wenn ξ, ξ', ξ'' drei Vektorbündel sind, so ergeben die möglichen Verkettungen der obigen Abbildung die folgende Komposition:

$$\begin{aligned} Th(\xi) \wedge Th(\xi') \wedge Th(\xi'') &\rightarrow a[a[h.(V)/h.(U\xi)] \wedge a[h.(V')/h.(U\xi')] \wedge a[h.(V'')/h.(U\xi'')]] \\ &\cong a([h.(V)/h.(U\xi)] \wedge [h.(V')/h.(U\xi')] \wedge [h.(V'')/h.(U\xi'')]) \\ &\cong a([h(V) \times h(V') \times h(V'')]/[h(U\xi) \times h(V') \times h(V'') \amalg h(V) \times h(U\xi') \times h(V'') \amalg h(V) \times h(V') \times h(U\xi'')]) \\ &\cong a(h(V \times_S V' \times_S V'')/[h(U\xi \times_S V' \times_S V'') \amalg h(V \times_S U\xi' \times_S V'') \amalg h(V \times_S V' \times_S U\xi'')]) \\ &\rightarrow a(h.(V \times_S V' \times_S V'')/h.(U(\xi \times_S \xi' \times_S \xi''))). \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung assoziativ. Die restlichen Eigenschaften sind klar. \square

Bemerkung Das Lemma zeigt, dass $\xi \mapsto Th(\xi)$ ein schwacher monoidaler Funktor von der Kategorie der Vektorbündel (mit Morphismen mit der Eigenschaft aus Lemma 6.9) nach $M.(S)$ ist.

Beispiel Der Thom-Raum der Projektion $\mathbb{A}_S^1 \rightarrow S$ wird mit \bar{T} bezeichnet. Nach dem Lemma ist $\bar{T} = a[h(\mathbb{A}_S^1)/(h(\mathbb{A}^1 - 0)_S)]$. Somit gibt es eine motivisch schwache Äquivalenz in $M.(S)$:

$$h(\mathbb{P}_S^1) \rightarrow a(h(\mathbb{P}_S^1)) \cong a[h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h((\mathbb{A}^1 - 0)_S)} h(\mathbb{A}_S^1)] \xrightarrow{\sim} a[h(\mathbb{A}_S^1) \amalg_{h((\mathbb{A}^1 - 0)_S)} *] = \bar{T} \text{ (siehe Lemma 2.63 und Lemma 2.52).}$$

Wir brauchen wegen des folgenden Lemmas im Folgenden nur über $Spec \mathbb{Z}$ zu arbeiten:

Lemma 6.11. *Sei S ein Schema. Der Pullback-Funktor $S \times - : Sch \rightarrow Sch/S, X \mapsto X^S = S \times X \xrightarrow{pr} S$ (bzw. manchmal X_S) erhält alle Limites, insbesondere Produkte und terminale Objekte, und schiebt Vektorbündel auf Vektorbündel. Falls $f : \xi \rightarrow \xi'$ ein Morphismus von Morphismen in Sch ist, so dass ξ und ξ' Vektorbündel sind und $U(\xi)$ von f auf $U(\xi')$ geschickt wird, so schiebt $S \times f$ die offene Menge $U(S \times \xi)$ auf $U(S \times \xi')$. Es gibt also insbesondere einen Morphismus auf Thom-Räumen $Th(f) : Th(\xi^S) \rightarrow Th(\xi'^S)$.*

Beweis. Da \mathbb{A}_X^1 -Moduln in Sch/X durch den Funktor auf $\mathbb{A}_{X_S}^1$ -Moduln in $(Sch/S)/(X_S) = Sch/X_S$ geschickt werden, da $S \times -$ Faserprodukte erhält, werden Vektorbündel auf Vektorbündel geschickt. Die letzte Aussage folgt wegen $U(S \times \xi) = pr_2^{-1}(U(\xi))$ (Lemma 6.10). \square

6.2.2 Das Grassmann-Schema und sein tautologisches Bündel

Als Nächstes werden wir das Grassmann-Schema und dessen tautologisches Bündel definieren. Dazu betrachten wir Schemata als Funktoren:

Definition 6.12. *Sei $\mathcal{R} := Func(Ring, Set)$ die Kategorie der Funktoren von Ringen (kommutativ mit Eins) nach Mengen. Sei $h^{Aff} : Sch \rightarrow \mathcal{R}$ der Funktor, der jedem Schema X den Funktor $R \mapsto Sch(Spec(R), X)$ zuordnet und entsprechend auf Morphismen definiert ist. Die Menge $Sch(Spec(R), X)$ wird auch mit $X(R)$ bezeichnet (wenn es keine Mehrdeutigkeiten gibt) und deren Elemente heißen R -Punkte von X .*

Beispiel • Die R -Punkte des Schemas GL_n können mit dem Funktor $R \mapsto GL_n(R)$ identifiziert werden.

- Der Funktor $R \mapsto R^n$, der einem Morphismus von Ringen $\varphi : R \rightarrow S$ die Abbildung $\varphi^{(n)} : R^n \rightarrow S^n$ (komponentenweise φ) zuordnet, wird mit den R -Punkten von \mathbb{A}^n identifiziert.

Bemerkung Der Funktor h^{Aff} erhält offenbar alle Limites, insbesondere Faserprodukte.

Proposition 6.13 ([DG, 4.4 Comparison Theorem in I, §1]). *Für zwei Schemata X, Y ist die Abbildung $h_{X,Y}^{Aff} : Sch(X, Y) \rightarrow \mathcal{R}(h^{Aff}(X), h^{Aff}(Y))$ ein Isomorphismus.*

Nun definieren wir den *Grassmann-Funktor* $Gr(d, n)$ in \mathcal{R} und dessen tautologisches Bündel (siehe [DG, I, § 1, 3.4 und I, §2, 4.4]).

Lemma-Definition 6.14. • Seien $n \geq d \geq 0$ zwei ganze Zahlen. Für jeden Ring R sei

$Gr(d, n)(R) = \{M \subseteq R^n \mid M \text{ ist lokal freier } R\text{-Untermodul vom Rang } d \text{ und direkter Summand von } R^n\}$.
Für Ringhomomorphismen $\varphi : R \rightarrow S$ ist $Gr(d, n)(\varphi) : Gr(d, n)(R) \rightarrow Gr(d, n)(S)$ die Abbildung, die ein $M \in Gr(d, n)(R)$ auf das von $\varphi^{(n)}(M) \subseteq S^n$ erzeugte S -Untermodul $\varphi_*(M)$ schickt. Diese Zuordnung ist wohldefiniert und definiert einen Funktor.

- Das tautologische Bündel $\tau(d, n)$ über $Gr(d, n)$ ist der Funktor

$$R \mapsto \{(M, v) \in Gr(d, n)(R) \times R^n \mid v \in M\},$$

der auf Morphismen durch $\varphi \mapsto Gr(d, n)(\varphi) \times \varphi^{(n)}$ definiert ist.

- Die Projektion $(M, v) \mapsto M$ wird mit $\xi_{n,d} : \tau(d, n) \rightarrow Gr(d, n)$ bezeichnet.

Beweis. Da das R -Modul M ein direkter Summand von R^n ist und direkte Summanden mit Tensorieren vertauschen, ist auch $S \otimes_R M$ ein direkter Summand von $S \otimes_R R^n \cong S^n$. Die Abbildung $S \otimes_R M \rightarrow S^n$ ist also injektiv und hat als Bild genau $\varphi_*(M)$, d.h. $S \otimes_R M \cong \varphi_*(M)$. Das Modul $S \otimes_R M$ ist auch lokal frei vom Rang d , denn für jedes Primideal q von S gilt $(S \otimes_R M)_q \cong S_q \otimes_{R_{\varphi^{-1}(q)}} M_{\varphi^{-1}(q)}$ als S_q -Modul. Somit gilt $\varphi_*(M) \in Gr(d, n)(S)$. \square

Proposition 6.15. Seien $n \geq d \geq 0$ zwei ganze Zahlen. Es gibt zwei Schemata und einen Morphismus $\xi(d, n) : Gr(d, n) \rightarrow \tau(d, n)$ zwischen ihnen, zusammen mit einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h^{Aff}(\tau(d, n)) & \xrightarrow{\cong} & \tau(d, n) \\ \downarrow h^{Aff}(\xi_{d,n}) & & \downarrow \xi_{d,n} \\ h^{Aff}(Gr(d, n)) & \xrightarrow{\cong} & Gr(d, n) \end{array}$$

Beweis. Die Existenz von $Gr(d, n)$ zusammen mit dem Isomorphismus wird in [DG, Example 3.13 und 4.4 Comparison Theorem b) in I, § 1] gezeigt, und die von $\tau(d, n)$ in [DG, I, § 2, 4.3 und 4.4]. Die Existenz des Morphismus $\xi_{d,n}$ folgt aus Proposition 6.13. \square

Bemerkung Damit werden von nun an die Schemata $Gr(d, n)$ und $\tau(d, n)$ und der Morphismus $\xi_{d,n}$ immer mit ihren Bildern in \mathcal{R} identifiziert. Abbildungen zwischen ihnen werden immer auf R -Punkten angegeben.

Proposition 6.16. Der Morphismus $\xi_{d,n} : \tau(d, n) \rightarrow Gr(d, n)$ trägt die Struktur eines Vektorbündel. Der Pullback $GL_n \times \xi_{d,n}$ trägt die induzierte Vektorbündel-Struktur.

Beweis. • Zunächst zeigen wir, dass $\tau(d, n)$ ein $\mathbb{A}_{Gr(d,n)}^1$ -Modul ist. Wir haben in $\mathcal{R}/Gr(d, n)$ eine Additionsabbildung $\tau(d, n) \times_{Gr(d,n)} \tau(d, n) \rightarrow \tau(d, n)$, $((M, v_1), (M, v_2)) \mapsto (M, v_1 + v_2)$, die assoziativ und kommutativ ist und als Inverses $((M, v) \mapsto (M, -v))$ hat. Außerdem gibt es eine Multiplikationsabbildung $\mathbb{A}_{Gr(d,n)}^1 \times_{Gr(d,n)} \tau(d, n)$, $((\lambda, M), (M, v)) \mapsto (M, \lambda v)$.

- Für jede $n - d$ -elementige Teilmenge I von $\{1, \dots, n\}$ (mit Komplement I') haben wir eine induzierte Inklusion $R^I \hookrightarrow R^n$. Wir können einen Unterfunktor U_I von $Gr(d, n)$ in \mathcal{R} durch

$$U_I(R) := \{M \in Gr(d, n) \mid R^I \hookrightarrow R^n \rightarrow R^n/M \text{ ist ein Isomorphismus}\}$$

definieren, denn die zusätzliche Bedingung ist mit Tensorieren verträglich. Sie ist dazu äquivalent, dass $M \oplus R^I = R^n$ eine direkte Summenzerlegung ist. Diese Unterfunktoren sind zu $h^{Aff}(\mathbb{A}^{n(n-d)})$ isomorph ([DG, I, §1, 3.9]):

Sei $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ die Standardbasis von R^n . Wir können dann schreiben:

$e_i = m_i + \sum_{j \in I} r_{ij} e_j$ für $i \in I'$, wobei $m_i \in M$ und $r_{ij} \in R$ eindeutig sind. Damit sind die $\{m_i, i \in I'\}$ eine Basis von M (denn für $p \in \text{Spec}(R)$ kann die Basis von M_p durch Linearkombinationen von $m_i, i \in I'$ und $e_j, j \in I$ geschrieben werden, aber wegen der direkten Summenzerlegung von R_p^n auch schon nur durch die m_i). Also sind die Elemente M von $U_I(R)$ genau die R -Untermoduln von R^n , die eine Basis der Form $\{e_i - \sum_{j \in I} r_{ij} e_j\}$ haben. Diese Basen sind mit Morphismen verträglich, d.h. Basen werden auf einander abgebildet. Also haben wir einen Isomorphismus $U_I \cong h^{Aff}(\mathbb{A}^{n(n-d)})$.

Aus dem gleich Grund haben wir

$$[\tau(d, n) \times_{Gr(d,n)} U_I](R) \cong \{(M, v) \in U_I(R) \times R^n \mid v \in M\} \cong U_I(R) \times R^d,$$

was verträglich mit Morphismen und mit der Modulstruktur ist. Also sind $\xi_{d,n|U_I}$ und $\mathbb{A}_{U_I}^d$ als $\mathbb{A}_{U_I}^1$ -Modul isomorph. Nach [DG, I, § 1, 3.9 Example und 4.15 Corollary] sind die durch die Inklusionen $U_I \hookrightarrow Gr(d,n)$ induzierten Abbildungen $u_i : \mathbb{A}^{n(n-d)} \rightarrow Gr(d,n)$ offene Immersionen, die $Gr(d,n)$ überdecken. Schließlich sind der Pullback $\xi_{d,n|u_i}$ und $\mathbb{A}_{\mathbb{A}^{n(n-d)}}^d$ als $\mathbb{A}_{\mathbb{A}^{n(n-d)}}^1$ -Moduln isomorph. \square

Bemerkung Wir können den Grassmann-Funktor auch auf Schemata definieren: sei X ein Schema, dann setze $Gr(d,n)(X) = \{M \subseteq \mathcal{O}_X^n \text{ lokal freies } \mathcal{O}_X\text{-Untermodul vom Rang } d, \text{ so dass } M \text{ lokal auf } X \text{ ein direkter Summand von } \mathcal{O}_X^n \text{ ist}\}$. Auf Morphismen wird $Gr(d,n)$ durch Pullback von Modul-Garben definiert. Dieser Funktor wird von dem Schema $Gr(d,n)$ repräsentiert: $h(Gr(d,n)) \cong Gr(d,n)$. Sei $\mathcal{M}_{d,n}$ das lokal freie $\mathcal{O}_{Gr(d,n)}$ -Modul vom Rang d der Schnitte des Vektorbündels $\tau(d,n)$ über $Gr(d,n)$. Dies ist ein Untermodul von \mathcal{O}_X^n und als Untermodul isomorph zu dem \mathcal{O}_X -Modul, was der Identität auf $Gr(d,n)$ entspricht.

Als Nächstes wollen wir das Komplement des Bildes des Nullschnittes von $\xi_{d,n}$ identifizieren:

Lemma 6.17. Die Menge $U(\xi_{d,n})$ ist gleich der Menge aller $x \in \tau(d,n)$, so dass es einen Körper K und einen Morphismus $Spec K \rightarrow \tau(d,n)$ mit Bild x gibt, der einem $(M,v) \in \tau(d,n)(K)$ mit $v \neq 0$ entspricht.

Beweis. Sei $z := z(\xi_{d,n})$. Wir zeigen, für alle $x \in \tau(d,n)$ gilt: $x \in Im z \Leftrightarrow \forall K \text{ Körper, } Spec K \xrightarrow{f} \tau(d,n)$ mit Bild x entspricht f einem $(M,0) \in \tau(d,n)(K)$.

• \Leftarrow Es gibt immer einen Morphismus $Spec k(x) \xrightarrow{f} \tau(d,n)$ mit Bild x . Dann entspricht dies einem $(M,0) \in \tau(d,n)(k(x))$. Die Abbildung in \mathcal{R} , die z entspricht, schickt $M \in Gr(d,n)(k(x))$ auf $(M,0)$. Dem Modul M entspricht also ein Morphismus $Spec(k(x)) \rightarrow Gr(d,n)$, der mit z komponiert f ist. Dann schickt z den Bildpunkt von $Spec k(x) \rightarrow Gr(d,n)$ auf x , also $x \in Im z$.

• \Rightarrow Sei $x \in Im z$, K ein Körper, $Spec K \xrightarrow{f} \tau(d,n)$ ein Morphismus mit Bild x und (M,v) das entsprechende Element in $\tau(d,n)(K)$. Dann gibt es ein $x_0 \in Gr(d,n)$ mit $x = z(x_0)$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Spec K & \longrightarrow & Spec k(x) & \longleftarrow & Spec k(x_0) \\ & \searrow f & \downarrow f_x & & \downarrow f_{x_0} \\ & & \tau(d,n) & \xleftarrow{z} & Gr(d,n) \end{array}$$

so dass der Bildpunkt von f_x der Punkt x und der von f_{x_0} der Punkt x_0 ist. Dann entspricht x_0 einem $M_0 \in Gr(d,n)(k(x_0))$ und x einem $(M',v') \in \tau(d,n)(k(x))$, so dass deren Bild in $\tau(d,n)(k(x_0))$ gleich ist. Damit geht v' unter der Abbildung $k(x)^n \hookrightarrow k(x_0)^n$ auf 0. Weil Abbildungen von Körpern injektiv sind, folgt $v' = 0$. Das Bild von (M',v') unter $\tau(d,n)(k(x)) \rightarrow \tau(d,n)(K)$ ist (M,v) , also gilt $v = 0$. \square

Im Folgenden werden GL_n -Wirkungen auf den tautologischen Bündeln definiert und mehrere äquivariante Abbildungen zwischen diesen Vektorbündeln.

Definition 6.18. • Wir wählen die natürlichen R -Modul-Isomorphismen $R^n \otimes_R M \cong M^{\oplus n}$, $e_i \otimes m \mapsto (0, \dots, 0, m, 0, \dots, 0)$ und erhalten für $M = R^m$ Isomorphismen $R^n \otimes_R R^m \cong (R^m)^{\oplus n} = R^{nm}$.

- Für $m, n \geq 0$ haben wir einen in R natürlichen Gruppen-Homomorphismus $-(^{(m)}): GL_n(R) \rightarrow GL_{nm}(R)$, der wie folgt definiert ist: Einer Matrix $A \in GL_n(R)$ entspricht ein R -Modul-Isomorphismus $f : R^n \rightarrow R^n$. Die Abbildung $f \otimes_R R^m$ ergibt nach Konjugieren mit obigem Isomorphismus ein Isomorphismus $R^{nm} \rightarrow R^{nm}$, dem eine Matrix $A^{(m)}$ in $GL_{nm}(R)$ entspricht. Diese induzieren einen Morphismus $GL_n \rightarrow GL_{nm}$ von Gruppenschemata.

Bemerkung Der Homomorphismus $-(^{(m)}): GL_n(R) \rightarrow GL_{nm}(R)$ kann auch wie folgt beschrieben werden: eine Matrix $A \in GL_n(R)$ wird auf die $nm \times nm$ -Matrix geschickt, die entsteht, wenn jeder Eintrag a von A durch die $m \times m$ -Diagonalmatrix $diag(a, \dots, a)$ ersetzt wird

Lemma-Definition 6.19. • Es gibt ein kommutatives Diagramm in Sch:

$$\begin{array}{ccc} GL_n \times \tau(d, n) & \xrightarrow{a_{\tau(d, n)}} & \tau(d, n) \\ \downarrow GL_n \times \xi_{d, n} & & \downarrow \xi_{d, n} \\ GL_n \times Gr(d, n) & \xrightarrow{a_{Gr(d, n)}} & Gr(d, n) \end{array}$$

so dass $a_{Gr(d, n)}$ und $a_{\tau(d, n)}$ Gruppenwirkungen sind. Diese werden auf R -Punkten durch $(A, (M, v)) \mapsto (A \cdot M, A \cdot v)$ bzw. $(A, M) \mapsto A \cdot M$ (wobei \cdot Matrix-Vektor-Multiplikation bedeutet) induziert. Das Diagramm beschreibt einen Morphismus $GL_n \times \xi_{d, n} \rightarrow \xi_{d, n}$, der mit $a_{\xi_{d, n}}$ bezeichnet wird. Die Menge $U(GL_n \times \xi_{d, n})$ wird auf $U(\xi_{d, n})$ abgebildet.

- Seien $n, m \geq 0$. Die Restriktion von $a_{\tau(n, nm)}$ bzw. $a_{Gr(n, nm)}$ entlang des Gruppenschema-Morphismus $GL_n \xrightarrow{-(m)} GL_{nm}$ ergibt eine Gruppenschema-Wirkung von GL_n auf $\tau(n, nm)$ bzw. $Gr(n, nm)$. $\xi_{n, nm}$ ist GL_n -äquivariant, d.h. es gibt einen Morphismus von Morphismen $a_{n, m} : GL_n \times \xi_{n, nm} \rightarrow \xi_{n, nm}$. Dieser bildet $U(GL_n \times \xi_{n, nm})$ auf $U(\xi_{n, nm})$ ab.

Beweis. Da es hierbei nur um die Existenz und Kommutativität von Morphismen geht, genügt es wegen Proposition 6.13 und, da h^{Aff} mit Produkten verträglich ist, dies in \mathcal{R} zu zeigen.

Eine Matrix $A \in GL_n(R)$ induziert einen Automorphismus des R -Moduls R^n . Falls $M \subseteq R^n$ ein R -Untermodul ist, ist das Bild unter diesem Automorphismus, $A \cdot M$, ein R -Untermodul von R^n . Dies induziert einen Isomorphismus $A \cong A \cdot M$ von R -Moduln. Da $A \cdot -$ auch direkte Summen erhält, induziert es Automorphismen von $Gr(d, n)(R)$ und $\tau(d, n)(R)$. Also sind die obigen Abbildungen auf Objekten definiert und Gruppenwirkungen. Falls $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus ist, gilt $\varphi^{(n)}(A \cdot v) = \varphi^{(n^2)}(A) \cdot \varphi^{(n)}(v)$ (denn $- \cdot -$ ist polynomiell in den Einträgen) und somit auch $\varphi_*(A \cdot M) = \varphi^{(n^2)}(A) \cdot \varphi_*(M)$. Also sind die Abbildungen natürliche Transformationen. Schließlich ist die Abbildung $\xi_{d, n}$ offenbar mit den Gruppenwirkungen verträglich.

Nach Lemma 6.10 haben wir $U(GL_n \times \xi_{d, n}) = pr_2^{-1}(U(\xi_{d, n}))$. Wegen $v \neq 0 \Rightarrow A \cdot v \neq 0$ für $A \in GL_n(K)$, $v \in K^n$ folgt aus Lemma 6.17, dass $pr_2^{-1}(U(\xi_{d, n}))$ auf $U(\xi_{d, n})$ abgebildet wird. \square

Lemma-Definition 6.20. Für $m, n \geq 0$ gibt es ein kommutatives Diagramm von GL_n -äquivarianten Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \tau(n, nm) & \longrightarrow & \tau(n, n(m+1)) \\ \downarrow \xi_{n, nm} & & \downarrow \xi_{n, n(m+1)} \\ Gr(n, nm) & \longrightarrow & Gr(n, n(m+1)) \end{array}$$

Dabei schickt die entsprechende Abbildung $Gr(n, nm) \rightarrow Gr(n, n(m+1))$ (und ähnlich die für $\tau(n, nm)$) ein $M \in Gr(n, nm)(R)$ auf das Bild von M unter dem R -Modulhomomorphismus $v_{n, m}^R : R^{n \cdot m} \rightarrow R^{n \cdot (m+1)}$, welcher die n -fache Summe von $v_{1, m}^R : R^m \rightarrow R^{m+1}$, $v \mapsto (v, 0)$ ist.

Der durch das Diagramm gegebene Morphismus $\xi_{n, nm} \rightarrow \xi_{n, n(m+1)}$ werde auch mit $v_{n, m}$ bezeichnet. Die Menge $U(\xi_{n, nm})$ wird auf $U(\xi_{n, n(m+1)})$ abgebildet.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $v_{n, m}^R(M) \in Gr(n, n(m+1))(R)$ ist. Zunächst ist $v_{n, m}^R(M)$ ein R -Untermodul, da $v_{n, m}^R$ ein R -Modulhomomorphismus ist. Offenbar ist $M \cong v_{n, m}^R(M)$, also ist $v_{n, m}^R(M)$ lokal frei vom Rang d . Da M ein direkter Summand von R^{nm} ist, ist $v_{n, m}^R(M)$ ein direkter Summand von $v_{n, m}^R(R^{nm}) = (R^m \oplus 0)^n$, welcher ein direkter Summand von $R^{n(m+1)}$ ist.

Weiterhin gilt, falls $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus ist, dass $v_{n, m}^S(\varphi_*(M)) = \varphi_*(v_{n, m}^R(M))$, da $v_{n, m}^R$ eine in R natürliche Abbildung ist und $v_{n, m}^S$ ein S -Modulhomomorphismus. Damit gibt es die beiden Morphismen $Gr(n, nm) \rightarrow Gr(n, n(m+1))$ und $\tau(n, nm) \rightarrow \tau(n, n(m+1))$, $(M, v) \mapsto (v_{n, m}^R(M), v_{n, m}^R(v))$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildungen GL_n -äquivariant sind. Dazu betrachtet wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} (R^m)^{\oplus n} & \xrightarrow{\cong} & R^n \otimes_R R^m & \xrightarrow{f \otimes_R R^m} & R^n \otimes_R R^m & \xrightarrow{\cong} & (R^m)^{\oplus n} \\ \downarrow (v_{1, m}^R)^{\oplus n} & & \downarrow R^n \otimes_R v_{1, m}^R & & \downarrow R^n \otimes_R v_{1, m}^R & & \downarrow (v_{1, m}^R)^{\oplus n} \\ (R^{m+1})^{\oplus n} & \xrightarrow{\cong} & R^n \otimes_R R^{m+1} & \xrightarrow{f \otimes_R R^m} & R^n \otimes_R R^{m+1} & \xrightarrow{\cong} & (R^{m+1})^{\oplus n} \end{array}$$

wobei f einer Matrix $A \in GL_n(R)$ entspricht. Die horizontalen Kompositionen entsprechen $A^{(m)}$ und die vertikalen äußeren Abbildungen sind $v_{n, m}$. Nach Definition folgt daraus die Äquivarianz.

Wegen Lemma 6.17 und da $v_{n,m}^R$ injektiv ist, werden die Komplemente von Nullschnitt-Mengen auf einander abgebildet. \square

Definition 6.21. Die Einschränkung von GL_n -Gruppenwirkungen auf Permutationsmatrizen definiert einen Funktor von der Kategorie Schemata mit GL_n -Gruppenwirkung (und äquivarianten Abbildungen) in die Kategorie der Schemata mit Σ_n -Gruppenwirkung (d.h. Schemata X zusammen mit Gruppenhomomorphismen $\Sigma_n \rightarrow \text{Aut}_{\text{Sch}}(X)$ und äquivarianten Abbildungen). Dieser Funktor wird im Folgenden, ohne genannt zu werden, benutzt.

Lemma-Definition 6.22. 1. Seien $n_i \geq d_i \geq 0, i = 0, 1$ ganze Zahlen. Es gibt ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tau(d_1, n_1) \times \tau(d_2, n_2) & \longrightarrow & \tau(d_1 + d_2, n_1 + n_2) \\ \downarrow \xi_{d_1, n_1} \times \xi_{d_2, n_2} & & \downarrow \xi_{d_1 + d_2, n_1 + n_2} \\ Gr(d_1, n_1) \times Gr(d_2, n_2) & \longrightarrow & Gr(d_1 + d_2, n_1 + n_2) \end{array}$$

wobei die horizontalen Abbildungen assoziativ sind und von

$$(M_1 \subseteq R^{n_1}, M_2 \subseteq R^{n_2}) \mapsto (M_1 \oplus M_2 \subseteq R^{n_1} \oplus R^{n_2} = R^{n_1 + n_2})$$

(bzw. $((M_1, v_1), (M_2, v_2)) \mapsto (M_1 \oplus M_2, (v_1, v_2)))$ auf R -Punkten induziert werden. Entsprechend können auch Multiplikationsabbildungen in mehr als zwei Variablen definiert werden, die dann auch assoziativ sind.

Die Menge $U(\xi_{d_1, n_1} \times \xi_{d_2, n_2})$ wird davon auf $U(\xi_{d_1 + d_2, n_1 + n_2})$ abgebildet.

2. Der durch das Diagramm gegebene Morphismus $\xi_{n, nm} \times \xi_{p, pm} \rightarrow \xi_{n+p, (n+p)m}$ zwischen Morphismen wird mit $\mu_{n, p, m}$ bezeichnet. Er ist $\Sigma_n \times \Sigma_m$ -äquivariant und das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \xi_{n, nm} \times \xi_{p, pm} & \xrightarrow{v_{n, m} \times v_{p, m}} & \xi_{n, n(m+1)} \times \xi_{p, p(m+1)} \\ \downarrow \mu_{n, p, m} & & \downarrow \mu_{n, p, m+1} \\ \xi_{n+p, (n+p)m} & \xrightarrow{v_{n+p, m}} & \xi_{n+p, (n+p)(m+1)} \end{array}$$

kommutiert.

3. Wir haben ein weiteres kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \xi_{n, nm} \times \xi_{p, pm} & \xrightarrow{t_{\xi_{n, nm}, \xi_{p, pm}}} & \xi_{p, pm} \times \xi_{n, nm} \\ \downarrow \mu_{n, p, m} & & \downarrow \mu_{p, n, m} \\ \xi_{n+p, (n+p)m} & \xrightarrow{\chi_{n, p^*}} & \xi_{p+n, (p+n)m} \end{array}$$

Beweis. 1. Es ist klar, dass $M_1 \oplus M_2$ auch direkter Summand und lokal frei vom Rang $d_1 + d_2$ ist.

Wir haben $U(\xi_{d_1, n_1} \times \xi_{d_2, n_2}) = pr_1^{-1}(U(\xi_{d_1, n_1})) \cup pr_2^{-1}(U(\xi_{d_2, n_2}))$ nach Lemma 6.10. Da $(v_1, v_2) \neq 0$, falls $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$, folgt mit Lemma 6.17 die zweite Aussage.

2. Wegen $v_{n+p, m}^R = (v_{1, m}^R)^{\oplus n+p} = (v_{1, m}^R)^{\oplus n} \oplus (v_{1, m}^R)^{\oplus p} = v_{n, m}^R \oplus v_{p, m}^R$ kommutiert das zweite Diagramm. Sei $(\tau_1, \tau_2) \in \Sigma_n \times \Sigma_p$. Dann gilt für deren Permutationsmatrizen gemäß der Bemerkung nach Lemma 6.20 $P_{\tau_1 \times \tau_2}^{(m)} = (P_{\tau_1} \oplus P_{\tau_2})^{(m)} = P_{\tau_1}^{(m)} \oplus P_{\tau_2}^{(m)}$ (wobei die Summe der Summe der entsprechenden Endomorphismen entspricht). Also ist $\mu_{n, p, m}$ $\Sigma_n \times \Sigma_p$ -äquivariant.

3. Der Morphismus χ_{n, p^*} entspricht der Permutation $t_{R^{n, R^p} \otimes_R R^m}$, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^{n+p} \otimes_R R^m & \xrightarrow{t_{R^{n, R^p} \otimes_R R^m}} & R^{p+n} \otimes_R R^m \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ (R^m)^{\oplus n+p} & \xrightarrow{t_{R^{n, R^p} \otimes_R R^m}} & (R^m)^{\oplus p+n} \end{array}$$

kommutiert (siehe Lemma 6.20), und schickt damit $M_1 \oplus M_2$ auf $M_2 \oplus M_1$. Also kommutiert das letzte Diagramm. \square

Lemma 6.23. Wir haben zwei Isomorphismen in dem folgenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\tau(n, n) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{A}^n \\
\downarrow \xi_{n,n} & & \downarrow \\
Gr(n, n) & \xrightarrow{\cong} & Spec \mathbb{Z}
\end{array}$$

wobei die obere Abbildung Σ_n -äquivariant ist.

Beweis. Falls $M \in Gr(n, n)(R)$ ist, so ist die Projektion $R^n \rightarrow M$ nach Lokalisierung an allen Primidealen von R ein Isomorphismus, denn M ist lokal frei vom Rang n und die Projektion surjektiv. Also ist die Projektion ein Isomorphismus und $M = R^n$. Somit ist $\tau(n, n)(R) \cong R^n$. Das heißt: $Gr(n, n) \cong Spec \mathbb{Z}$ und $\tau(n, n) \cong \mathbb{A}^n$. \square

6.2.3 Semistabilität von MGL

Schließlich wird das symmetrische Spektrum MGL definiert und seine Semistabilität gezeigt.

Lemma-Definition 6.24 ([PPR2, 2.1]). *Das symmetrische algebraische Cobordismus-Spektrum MGL ist das unterliegende symmetrische \bar{T} -Spektrum des kommutativen symmetrischen \bar{T} -Ringspektrums (siehe Def. 3.10), das aus folgenden Daten besteht:*

- eine Folge von punktierten motivischen Räumen $MGL_n := \text{colim}_{m \geq 1} (\dots \rightarrow Th(\xi_{n, nm}^S) \xrightarrow{Th(v_{n, m})} Th(\xi_{n, n(m+1)}^S) \rightarrow \dots)$, $n \geq 0$ mit der induzierten Σ_n -Wirkung,
- $\Sigma_n \times \Sigma_p$ -äquivariante Multiplikationsabbildungen $\mu_{n,p} : MGL_n \wedge MGL_p \rightarrow MGL_{n+p}$, $n, p \geq 0$, die durch die Abbildungen $Th(\xi_{n, nm}^S) \wedge Th(\xi_{p, pm}^S) \rightarrow Th(\xi_{n, nm}^S \times_S \xi_{p, pm}^S) \xrightarrow{Th(\mu_{n,p,m})} Th(\xi_{n+p, (n+p)m}^S)$ aus Lemma 6.17 und 6.22 induziert sind, und
- Σ_n -äquivariante Einheitsabbildungen $\iota_n : \bar{T}^n \rightarrow MGL_n$, $n \geq 0$, die für $n \geq 1$ die Kompositionen: $\bar{T}^n \cong Th(\xi_{1,1}^S)^{\wedge n} \rightarrow Th(\xi_{1,1}^{S \times S^n}) \rightarrow Th(\xi_{n,n}^S) \rightarrow MGL_n$ sind (und für $n = 0$: $S^0 = h.(S) \rightarrow Th(1_S) \cong Th(\xi_{0,0}^S) \xrightarrow{\cong} MGL_0$).

Beweis. • Zur Definition der Multiplikationsabbildung wird benutzt, dass $-\wedge-$ mit Colimites vertauscht und der Colimes $MGL_n \wedge MGL_p$ dann schon auf der Diagonalen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ausgerechnet werden kann. Die Multiplikation ist wohldefiniert, denn $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$ (siehe Lemma 6.9) ist natürlich und das zweite Diagramm in 6.22 kommutiert.

Die Multiplikationsabbildungen sind $\Sigma_n \times \Sigma_p$ -äquivariant, da

• Wegen der Assoziativität von $\mu_{n,p,m}$ nach Lemma 6.22 und der Assoziativität von $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$ folgt die Assoziativität von $\mu_{n,p}$. Auch hierfür wird wieder benutzt, dass das dreifache Smash-Produkt schon durch den Colimes auf der „Diagonalen“ (in \mathbb{N}^3) festgelegt ist.

• Die Kommutativität folgt aus Lemma 6.22-3. zusammen mit der Symmetrie von $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$. Aus der Kommutativität folgt die Zentralität von ι_1 .

• Einheit: Da $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$ mit Einheiten verträglich ist (Diagramm in Lemma 6.9), folgt die Bedingungen über die Einheit ι_0 .

Die höheren Einheiten ι_n , $n \geq 1$ sind miteinander kompatibel, denn folgendes Diagramm kommutiert (wegen Assoziativität und Natürlichkeit von $Th(\xi) \wedge Th(\xi') \rightarrow Th(\xi \times_S \xi')$ sowie der Assoziativität von $\mu_{n,p,m}$, siehe 6.22):

$$\begin{array}{ccccc}
Th(\xi_{1,1}^S)^{\wedge n+p} & & & & \\
\downarrow & \searrow & & & \\
Th(\xi_{1,1}^{S \times S^n}) \wedge Th(\xi_{1,1}^{S \times S^p}) & \longrightarrow & Th(\xi_{1,1}^{S \times S^{n+p}}) & & \\
Th(\mu) \wedge Th(\mu) \downarrow & & Th(\mu \times_S \mu) \downarrow & \searrow & Th(\mu) \\
Th(\xi_{n,n}^S) \wedge Th(\xi_{p,p}^S) & \longrightarrow & Th(\xi_{n,n}^S \times_S \xi_{p,p}^S) & \longrightarrow & Th(\xi_{n+p,n+p}^S) \\
& & & \text{Th}(\mu_{n,p,1}) &
\end{array}$$

\square

Corollar 6.25. *Das symmetrische Spektrum MGL ist semistabil.*

Beweis. Es gibt in $M.(S)$ einen Morphismus $a_{\text{MGL}_n} : h.(GL_n^S) \wedge \text{MGL}_n \rightarrow \text{MGL}_n$, der durch das kommutative Diagramm induziert wird:

$$\begin{array}{ccccc} h.(GL_n^S) \wedge Th(\xi_{n,nm}^S) & \xrightarrow{Th_{GL_n^S, \xi_{n,nm}^S}} & Th(GL_n^S \times_S \xi_{n,nm}^S) & \xrightarrow{Th(a_{n,m}^S)} & Th(\xi_{n,nm}^S) \\ \downarrow 1 \wedge Th(v_{n,m}) & & \downarrow Th(GL_n^S \times_S v_{n,m}) & & \downarrow Th(v_{n,m}) \\ h.(GL_n^S) \wedge Th(\xi_{n,n(m+1)}^S) & \xrightarrow{Th_{GL_n^S, \xi_{n,n(m+1)}^S}} & Th(GL_n^S \times_S \xi_{n,n(m+1)}^S) & \xrightarrow{Th(a_{n,m+1}^S)} & Th(\xi_{n,n(m+1)}^S) \end{array}$$

Die Kommutativität des linken Rechtecks folgt aus Natürlichkeit (siehe Lemma 6.10) und die des rechten Rechtecks aus der Funktorialität der Thom-Räumen (siehe Lemma 6.9) und der GL_n^S -Äquivarianz des zweiten Diagramms in Lemma 6.20.

Falls $\tau \in \Sigma_n$ ist und $S \xrightarrow{f_\tau} GL_n^S$ der durch die Permutationsmatrix P_τ induzierte Morphismus, dann kommutiert (siehe Lemma 6.10):

$$\begin{array}{ccc} Th(\xi_{n,nm}^S) & \xrightarrow{Th(\cong)} & Th(\xi_{n,nm}^S) \\ \cong \downarrow & \searrow Th(\tau_*) & \\ h.(S) \wedge Th(\xi_{n,nm}^S) & \xrightarrow{Th_{S, \xi_{n,nm}^S}} & Th(S \times_S \xi_{n,nm}^S) \\ h.(f_\tau) \wedge 1 \downarrow & & \downarrow Th(f_\tau \times_S 1) \\ h.(GL_n^S) \wedge Th(\xi_{n,nm}^S) & \xrightarrow{Th_{GL_n^S, \xi_{n,nm}^S}} & Th(GL_n^S \times_S \xi_{n,nm}^S) \xrightarrow{Th(a_{n,m}^S)} Th(\xi_{n,nm}^S) \end{array}$$

Demnach setzt $h.(GL_n^S) \wedge \text{MGL}_n \rightarrow \text{MGL}_n$ die Σ_n -Wirkung auf MGL_n fort. Die Semistabilität folgt dann aus Corollar 5.24. \square

7 Multiplikative Struktur auf den stabilen Homotopiegruppen von symmetrischen Ringspektren und deren Lokalisierung

In diesem Kapitel werden wir eine Verallgemeinerung von [Sch09, Ch. I, Prop. 7.31] beweisen. Es wird gezeigt, dass die Lokalisierungen $R[1/x]$ (siehe Def. 3.14) von semistabilen symmetrischen Spektren R wieder semistabil sind und dass die Abbildungen $j : R \rightarrow R[1/x]$ auf stabilen Homotopiegruppen Lokalisierungen induzieren (Abschnitt 7.2).

Es gelten die Voraussetzung des Abschnittes 3.4.4 und T besitze ein Vorzeichen. Außerdem wird angenommen, dass das Smash-Produkt in \mathcal{D} schwache Äquivalenzen erhält, was in den unseren Beispielen, den simplizialen Mengen und den motivischen Räumen, gilt (siehe Prop. 2.53).

Wir nehmen an, dass es einen kommutativen Monoiden N (mit Null), für jedes $r \in N$ ein cofaserndes Objekt \mathbb{S}^r sowie Isomorphismen $s_{r_1, r_2} : \mathbb{S}^{r_1+r_2} \rightarrow \mathbb{S}^{r_1} \wedge \mathbb{S}^{r_2}$ in \mathcal{D} für alle $r_1, r_2 \in N$ gibt, so dass gilt:

- es gibt einen Isomorphismus: $\cong^{\mathbb{S}^0} : \mathbb{S}^0 \cong S^0$,
- $s_{-, -}$ ist assoziativ, und
- es sind isomorph: $s_{0, r} \cong l_{\mathbb{S}^r}^{-1}$ und $s_{r, 0} \cong \rho_{\mathbb{S}^r}^{-1}$ (via $\mathbb{S}^0 \cong S^0$).

Außerdem nehmen wir an, dass es eine Klasse von cofasernden Objekten \mathcal{B}' in \mathcal{D} gibt, so dass $\mathcal{B} = \{\mathbb{S}^r \wedge U \mid r \in N, U \in \mathcal{B}'\}$ gilt.

Beispiel • Das Standardbeispiel ist $N = \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{S}^r = S^r = (S^1)^{\wedge r}$ zusammen mit den Identitäten $S^{r_1+r_2} = S^{r_1} \wedge S^{r_2}$

- Das erste Beispiel für $\mathcal{D} = M.(S)$ kann um eine zweite Sphäre \mathbb{G}_m ergänzt werden: $N = \mathbb{N}_0^2$ und $\mathbb{S}^r = S^{r'} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge r''}$ mit $r = (r', r'')$. Wir haben dann Isomorphismen durch Permutation: $(S^{r'_1} \wedge S^{r'_2}) \wedge (\mathbb{G}_m^{\wedge r''_1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge r''_2}) \cong (S^{r'_1} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge r''_1}) \wedge (S^{r'_2} \wedge \mathbb{G}_m^{\wedge r''_2})$

Definition 7.1. Für ein symmetrisches T -Spektrum X setzen wir

$$\pi_{r,q}^U(X) := \pi_q^{\mathbb{S}^r \wedge U}(X),$$

für alle $r \in N, U \in \mathcal{B}', q \in \mathbb{Z}$.

Definition 7.2. Wir setzen $\mathbb{S}^{t_{r,r'}} = s_{r,r'}^{-1} t_{\mathbb{S}^r, \mathbb{S}^{r'}} s_{r,r'}$ und erhalten eine Abbildung $t_{r',r} : \pi_{r'+r,q}^U(X) \rightarrow \pi_{r+r',q}^U(X)$ die durch die Abbildungen

$$[\mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge T^{q+m}, X_m] \xrightarrow{(\mathbb{S}^{t_{r,r'}} \wedge T \wedge T^{q+m})^*} [\mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge T^{q+m}, X_m]$$

induziert ist. Insbesondere gilt dann $t_{0,r} = t_{r,0} = id$, denn $l_{\mathbb{S}^r} \circ t_{\mathbb{S}^r, \mathbb{S}^0} = \rho_{\mathbb{S}^r}$.

7.1 Die Multiplikation auf den stabilen Homotopiegruppen

Die folgende Konstruktion einer Multiplikation auf den stabilen Homotopiegruppen ist eine Verallgemeinerung von [Sch09, Construction 7.7]. Das Vorzeichen $(-1)_T^{q'n}$ in der Definition wird u.a. benötigt, um zu zeigen, dass das Produkt mit Stabilisierung verträglich ist.

Lemma 7.3. Sei R ein semistabiles symmetrisches T -Ringspektrum. Dann gibt es für alle cofasernden Objekte U, V in \mathcal{D} und $r, r' \in N, q, q' \in \mathbb{Z}$ eine (in R, U, V) natürliche biadditive Abbildung

$$m_{r,q,r',q'}^{U,V,R} : \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r',q'}^V(R) \rightarrow \pi_{r+r',q+q'}^{U \wedge V}(R)$$

die auf den Colimites durch folgende Abbildung ($q+n, q'+n' \geq 1$) induziert wird:

$\cdot : [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n] \times [\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}, R_{n'}] \rightarrow [\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+q'+n+n'}, R_{n+n'}]$, dabei wird das Paar (f, g) auf die Komposition

$$\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+q'+n+n'} \xrightarrow{s_{r,r'} \wedge U \wedge V \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1} \mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'} \xrightarrow{\eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V}} (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}) \wedge (\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}) \xrightarrow{f \wedge g} R_n \wedge R_{n'} \xrightarrow{\mu_{n,n'}} R_{n+n'}$$

geschickt. Hier ist $\eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V}$ die entsprechend angezeigte Permutation der Smash-Faktoren: $\mathbb{S}^r \wedge [(t_{\mathbb{S}^{r'}, U \wedge T^{q+n}} \wedge V) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge t_{V, T^{q+n}})] \wedge T^{q'+n'}$.

Das Produkt ist assoziativ, d.h. es kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r',q'}^V(R) \times \pi_{r'',q''}^W(R) & \xrightarrow{m \times 1} & \pi_{r+r',q+q'}^{U \wedge V}(R) \times \pi_{r'',q''}^W(R) \\ \downarrow 1 \times m & & \downarrow m \\ \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r'+r'',q'+q''}^{V \wedge W}(R) & \xrightarrow{1 \times m} & \pi_{r+r'+r'',q+q'+q''}^{U \wedge V \wedge W}(R) \end{array}$$

Das Produkt ist mit den Vorzeichen $(-1)_T$ in beiden Variablen verträglich:

$$(-1)_T(f \cdot g) = ((-1)_T f) \cdot g = f \cdot ((-1)_T g)$$

Falls R kommutativ ist, ist die Multiplikation kommutativ, d.h. das Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r',q'}^V(R) & \xrightarrow{m^{U,V}} & \pi_{r+r',q+q'}^{U \wedge V}(R) \\ \downarrow t & & \searrow (-1)_T^{q'q} t_{r',r} \\ \pi_{r',q'}^V(R) \times \pi_{r,q}^U(R) & \xrightarrow{m^{V,U}} & \pi_{r'+r,q'+q}^{V \wedge U}(R) \xrightarrow{t_{U,V}^*} \pi_{r'+r,q'+q}^{U \wedge V}(R) \end{array}$$

Es genügt auch schon, dass die Abbildung $f : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \rightarrow R_n$ in \mathcal{D} zentral ist, damit $[f] \in \pi_{r,q}^U(R)$ bis auf ein Vorzeichen bezüglich des Produkts zentral ist: $t_{U,V}^* \circ (g \cdot [f]) = (-1)_T^{q'q} t_{r',r}([f] \cdot g)$.

Beweis. • 0. Biadditivität

Das Produkt ist schon vor Übergang zur Stabilisation biadditiv. Wir zeigen die Additivität nur für die erste Variable. Der Beweis für die zweite Variable läuft entsprechend. Seien $f, f' : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \rightarrow R_n$ und $g : \mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'} \rightarrow R_{n'}$ Abbildungen in $Ho(\mathcal{D})$. Die Summe $f + f'$ von f und f' ist:

$$\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \xrightarrow{\mathbb{S}^r \wedge U \wedge \mu \wedge T^{q+n-1}} \mathbb{S}^r \wedge U \wedge (T \vee T) \wedge T^{q+n-1} \cong (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge \mu \wedge T^{q+n-1} \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T \wedge T^{q+n-1}) \vee (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge \mu \wedge T^{q+n-1} \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T \wedge T^{q+n-1}) \xrightarrow{(f, f')} R_n, \text{ wobei } \mu : T \rightarrow T \vee T \text{ die Comultiplikation von } T \text{ ist (siehe Lemma 2.13).}$$

Das folgende Diagramm kommutiert (hier wurden die \wedge -Zeichen aus Platzgründen weggelassen):

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^r \mathbb{S}^{r'} UV T^{q+n} T^{q'+n'} & \xrightarrow{\eta} & (\mathbb{S}^r UT^{q+n})(\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'}) \\
\downarrow \mathbb{S}^r \mathbb{S}^{r'} UV \mu T^{q+n-1} T^{q'+n'} & & \downarrow [\mathbb{S}^r U \mu T^{q+n-1}](\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'}) \\
\mathbb{S}^r \mathbb{S}^{r'} UV (T \vee T) T^{q+n-1} T^{q'+n'} & \xrightarrow{\eta} & [\mathbb{S}^r U (T \vee T) T^{q+n-1}](\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'}) \\
\cong \uparrow \text{iso}_2 & & \cong \uparrow \text{iso}_1(\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'}) \\
(\mathbb{S}^r \mathbb{S}^{r'} UV T^{q+n} T^{q'+n'}) \vee (\mathbb{S}^r \mathbb{S}^{r'} UV T^{q+n} T^{q'+n'}) & & [(\mathbb{S}^r UT^{q+n}) \vee (\mathbb{S}^{r'} UT^{q+n})](\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'}) \\
\downarrow \eta \vee \eta & \nearrow \cong & \downarrow (f, f')g \\
[(\mathbb{S}^r UT^{q+n})(\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'})] \vee [(\mathbb{S}^r UT^{q+n})(\mathbb{S}^{r'} VT^{q'+n'})] & \xrightarrow{(fg, f'g)} & R_n R_{n'}
\end{array}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
(f + f') \cdot g &= \mu_{n,n'} [((f, f') \text{iso}_1^{-1}(1 \wedge \mu \wedge 1)) \wedge g] \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}(s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1) \\
&= \mu_{n,n'} [(f, f') \wedge g] (\text{iso}_1^{-1} \wedge 1) [(1 \wedge \mu \wedge 1) \wedge 1] \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}(s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1) \\
&= \mu_{n,n'} (f \wedge g, f' \wedge g) [(\eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}, \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}) \text{iso}_2^{-1}(1 \wedge \mu \wedge 1)] (s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1) \\
&= [\mu_{n,n'} (f \wedge g) \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}(s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1), \mu_{n,n'} (f' \wedge g) \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}(s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1)] \text{iso}_3^{-1}(1 \wedge \mu \wedge 1) \\
&= (f \cdot g, f' \cdot g) \text{iso}_3^{-1}(1 \wedge \mu \wedge 1) = (f \cdot g) + (f' \cdot g), \text{ wobei der Isomorphismus} \\
\text{iso}_3 : (\mathbb{S}^{r+r'} UV T^{q+q'+n+n'}) \vee (\mathbb{S}^{r+r'} UV T^{q+q'+n+n'}) &\rightarrow (\mathbb{S}^{r+r'} UV (T \vee T) T^{q+q'+n+n'-1}) \text{ durch die Inklusionen induziert ist.}
\end{aligned}$$

• 1. Assoziativität

Das Produkt ist schon vor Übergang zur Stabilisation assoziativ, was im folgenden gezeigt wird. (Bei der Rechnung wird ein kleiner Notationsmissbrauch an dem Symbol η betrieben.) Seien $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n]$, $g \in [\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}, R_{n'}]$ und $h \in [\mathbb{S}^{r''} \wedge W \wedge T^{q''+n''}, R_{n''}]$. Dann ist: $(f \cdot g) \cdot h = \mu_{n+n', n''} \circ ((f \cdot g) \wedge h) \circ \eta_{q+q'+n+n', q''+n''}^{r+r', r'', U \wedge V, W} \circ (s_{r+r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''(n+n')} \wedge 1)$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{n+n', n''} \circ ([\mu_{n,n'} \circ (f \wedge g) \circ \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \circ (s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1)] \wedge h) \circ \eta_{q+q'+n+n', q''+n''}^{r+r', r'', U \wedge V, W} \circ (s_{r+r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''(n+n')} \wedge 1) \\
&= [\mu_{n+n', n''} \circ (\mu_{n,n'} \wedge 1)] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(\eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \circ (s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1)) \wedge 1] \circ \eta_{q+q'+n+n', q''+n''}^{r+r', r'', U \wedge V, W} \circ (s_{r+r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''(n+n')} \wedge 1) \\
&= [\mu_{n+n', n''} \circ (\mu_{n,n'} \wedge 1)] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(\eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \wedge 1) \circ \eta_{q+q'+n+n', q''+n''}^{r+r', r'', U \wedge V, W}] \circ [(s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n} \wedge 1) \circ (s_{r+r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''(n+n')} \wedge 1)] \\
&= [\mu_{n+n', n''} \circ (\mu_{n,n'} \wedge 1)] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(\eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \wedge 1) \circ \eta_{q+q'+n+n', q''+n''}^{r+r', r'', U \wedge V, W}] \circ (((s_{r, r'} \wedge 1) s_{r+r', r''}) \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'n+q''(n+n')} \wedge 1)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im vorletzten Schritt die Natürlichkeit der Permutationsabbildung benutzt. Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot h) &= \mu_{n, n'+n''} \circ (f \wedge (g \cdot h)) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W} \circ (s_{r, r'+r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{(q'+q'')n} \wedge 1) \\
&= \mu_{n, n'+n''} \circ (f \wedge [\mu_{n', n''} \circ (g \wedge h) \circ \eta_{q'+n', q''+n''}^{r', r'', V, W} \circ (s_{r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge 1)]) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W} \circ (s_{r, r'+r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{(q'+q'')n} \wedge 1) \\
&= [\mu_{n, n'+n''} \circ (1 \wedge \mu_{n', n''})] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ (1 \wedge [\eta_{q'+n', q''+n''}^{r', r'', V, W} \circ (s_{r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge 1)]) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W} \circ (s_{r, r'+r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{(q'+q'')n} \wedge 1) \\
&= [\mu_{n, n'+n''} \circ (1 \wedge \mu_{n', n''})] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(1 \wedge \eta_{q'+n', q''+n''}^{r', r'', V, W}) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W}] \circ [1 \wedge (s_{r', r''} \wedge 1 \wedge T^{q+n} \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge 1) \circ (s_{r, r'+r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{(q'+q'')n} \wedge 1)] \\
&= [\mu_{n, n'+n''} \circ (1 \wedge \mu_{n', n''})] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(1 \wedge \eta_{q'+n', q''+n''}^{r', r'', V, W}) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W}] \circ [1 \wedge (s_{r', r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge 1) \circ (s_{r, r'+r''} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{(q'+q'')n} \wedge 1)] \\
&= [\mu_{n, n'+n''} \circ (1 \wedge \mu_{n', n''})] \circ (f \wedge g \wedge h) \circ [(1 \wedge \eta_{q'+n', q''+n''}^{r', r'', V, W}) \circ \eta_{q+n, q'+q''+n'+n''}^{r, r'+r'', U, V \wedge W}] \circ (((1 \wedge s_{r', r''}) s_{r, r'+r''}) \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q''n'+(q'+q'')n} \wedge 1)
\end{aligned}$$

In letzter Rechnungen wurde im vorvorletzten Schritt die Natürlichkeit der Permutationsabbildung benutzt. Im vorletzten Schritt benutzen wir die Definition 2.56 des Vorzeichens von T , wonach folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}^{r+r'+r''} \wedge U \wedge V \wedge W \wedge T^{q+n} \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge T^{q'+q''+n'+n''-1} \\ &= \mathbb{S}^{r+r'+r''} \wedge U \wedge V \wedge W \wedge (-1)_T^{q''n'} \wedge T^{q'+q''+n'+n''-1} \end{aligned}$$

Wegen der Assoziativität von R gilt $\mu_{n,n'+n''} \circ (1 \wedge \mu_{n',n''}) = \mu_{n+n',n''} \circ (\mu_{n,n'} \wedge 1)$. Wir haben $(1 \wedge \eta_{q'+n',q''+n''}^{r',r'',V,W}) \circ \eta_{q+n,q'+q''+n'+n''}^{r,r'+r'',U,V \wedge W} = (\eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V} \wedge 1) \circ \eta_{q'+q''+n'+n'',q''+n''}^{r+r',r'',U \wedge V,W}$, da beide Seiten durch Permutationen induziert sind.

Schließlich ist $q'n + q''(n + n') = q''n' + (q' + q'')n$ und $(s_{r,r'} \wedge 1)_{s_{r+r',r''}} = (1 \wedge s_{r',r''})_{s_{r,r'+r''}}$. Somit ist die Assoziativität bewiesen.

• 2. Verträglichkeit mit Stabilisierung

Wir zeigen, dass obiges Produkt bis auf Stabilisierung verträglich mit der Stabilisierung $\iota_* := \sigma_* \cdot (-\wedge T)$ in beiden Variablen ist.

Für die zweite Variable bedeutet dies, dass

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n] \times [\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}, R_{n'}] & \xrightarrow{\quad} & [\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q'+q''+n+n'}, R_{n+n'}] \\ \downarrow 1 \times \iota_* & & \downarrow \iota_* \\ [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n] \times [\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'+1}, R_{n'+1}] & \xrightarrow{\quad} & [\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q'+q''+n+n'+1}, R_{n+n'+1}] \end{array}$$

kommutiert.

Dies wird aus: $\iota_*(f) = [f \cdot (\iota_1 \circ c)] \circ (\mathbb{S}^r \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1})$ mit $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n]$ folgen, wobei $c = l_T \circ l_{S^0 \wedge T} \circ (\cong \wedge 1) : \mathbb{S}^0 \wedge S^0 \wedge T \rightarrow T$ ist, denn

$$\begin{aligned} & [f \cdot (\iota_1 \circ c)] \circ (\mathbb{S}^r \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1}) = \mu_{n,1} \circ (f \wedge (\iota_1 \circ c)) \circ \eta_{q+n,0+1}^{r,0,U,S^0} \circ (s_{r,0} \wedge 1) \circ (\mathbb{S}^r \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1}) = \\ & \mu_{n,1} \circ (f \wedge \iota_1) = \sigma_n \circ (f \wedge T) = \iota_*(f) \text{ wegen} \\ & (1 \wedge ([l_T l_{S^0 \wedge T} \circ ((\mathbb{S}^0 \rightarrow S^0) \wedge 1)]) \circ (\mathbb{S}^r \wedge [(t_{S^0,U \wedge T^{q+n}} \wedge S^0)(S^0 \wedge U \wedge t_{S^0,T^{q+n}})] \wedge T) \circ (s_{r,0} \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1}) = \\ & (1 \wedge l_T l_{S^0 \wedge T}) \circ (\mathbb{S}^r \wedge [(t_{S^0,U \wedge T^{q+n}} \wedge S^0)(S^0 \wedge U \wedge t_{S^0,T^{q+n}})] \wedge T) \circ (\rho_{S^r}^{-1} \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1}) = 1. \end{aligned}$$

Mit der obigen Assoziativität und der Natürlichkeit folgt dann:

$$\iota_*(f \cdot g) = [(f \cdot g) \cdot (\iota_1 c)] \circ (1 \wedge \rho_{U \wedge V}^{-1} \wedge 1) = [f \cdot (g \cdot (\iota_1 c))] \circ (1 \wedge U \wedge \rho_V^{-1} \wedge 1) = f \cdot [(g \cdot (\iota_1 c)) \circ (1 \wedge \rho_V^{-1} \wedge 1)] = f \cdot \iota_*(g).$$

Damit erhalten wir eine Abbildung: $[\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n] \times \pi_{r',q'}^U(R) \rightarrow \pi_{r+r',q+q'}^U(R)$.

Für die erste Variable verhält es sich nicht so einfach. Hier erhalten wir nur: $[\iota_*(f) \cdot g] = [f \cdot g]$. Wegen $\iota_*(f) \cdot g = [(f \cdot \iota_1 c) \circ (\mathbb{S}^r \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1})] \cdot g = [(f \cdot \iota_1 c) \cdot g] \circ (1 \wedge \rho_U^{-1} \wedge 1) = [f \cdot (\iota_1 c \cdot g)] \circ (1 \wedge l_V^{-1} \wedge 1) = f \cdot [(\iota_1 c \cdot g) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'})]$

und dem Vorherigen reicht es zu zeigen, dass $[(\iota_1 c \cdot g) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'})] = [g]$ in $\pi_{r',q'}^V(R)$ gilt.

Wir werden $(\iota_1 c \cdot g) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'}) = \chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (1 \wedge (-1)_T^{n'} \wedge 1)$ zeigen:

$$\begin{aligned} & (\iota_1 c \cdot g) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'}) = \mu_{1,n'} \circ (\iota_1 \wedge 1) \circ (c \wedge g) \circ \eta_{0+1,q'+n'}^{0,r',S^0,V} \circ (s_{0,r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'} \wedge 1) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge \\ & l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'}) \\ & \stackrel{\text{zentral}}{=} [\chi_{n',1} \circ \mu_{n',1} \circ (1 \wedge \iota_1) \circ t_{T,R_{n'}}] \circ (c \wedge g) \circ \eta_{0+1,q'+n'}^{0,r',S^0,V} \circ (s_{0,r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'}) \circ (1 \wedge (-1)_T^{q'} \wedge 1) \\ & = \chi_{n',1} \circ \mu_{n',1} \circ (g \wedge \iota_1) \circ [t_{T,\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}} \circ (c \wedge 1) \circ \eta_{0+1,q'+n'}^{0,r',S^0,V} \circ (s_{0,r'} \wedge l_V^{-1} \wedge T^{1+q'+n'})] \circ (1 \wedge (-1)_T^{q'} \wedge 1) \\ & = \chi_{n',1} \circ \mu_{n',1} \circ (g \wedge \iota_1) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge t_{T,T^{q'+n'}}) \circ (1 \wedge (-1)_T^{q'} \wedge 1) \\ & = \chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge (-1)_T^{q'+n'} \wedge T^{q'+n'}) \circ (1 \wedge (-1)_T^{q'} \wedge 1) \\ & = \chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (1 \wedge (-1)_T^{n'} \wedge 1) \end{aligned}$$

Schließlich ist nach Stabilisierung:

$$\begin{aligned} & [\chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (1 \wedge (-1)_T^{n'} \wedge 1)] = d[\iota_*(g)] = [g], \text{ denn der Zykeloperator } d \text{ wirkt wegen der Semistabilität} \\ & \text{trivial. Zusammengefasst: } [\iota_*(f) \cdot g] = [f \cdot \chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (1 \wedge (-1)_T^{n'} \wedge 1)] = f \cdot [\chi_{n',1} \circ \iota_*(g) \circ (1 \wedge (-1)_T^{n'} \wedge 1)] = \\ & f \cdot [g] = [f \cdot g]. \text{ Somit folgt die Wohldefiniertheit von:} \\ & \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r',q'}^V(R) \rightarrow \pi_{r+r',q+q'}^{U \wedge V}(R), [f] \cdot [g] = [f \cdot g]. \end{aligned}$$

• 3. Verträglichkeit mit Vorzeichen

Dies folgt aus der Natürlichkeit der Permutationsabbildung $\eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V}$ zusammen mit der zweiten Eigenschaft des Vorzeichens (Def. 2.56):

$$\bullet [(\mathbb{S}^r \wedge U \wedge (-1)_T \wedge T^{q+n-1}) \wedge 1] \circ \eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V} = \eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V} \circ (1 \wedge (-1)_T \wedge T^{q+n-1} \wedge T^{q'+n'})$$

- $[1 \wedge (\mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge (-1)_T \wedge T^{q'+n'-1})] \circ \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} = \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \circ (1 \wedge T^{q+n} \wedge (-1)_T \wedge T^{q'+n'-1})$

- $1 \wedge T^{q+n} \wedge (-1)_T \wedge T^{q'+n'-1} = 1 \wedge (-1)_T \wedge T^{q+n-1} \wedge T^{q'+n'}$

• **4. Kommutativität** Wir haben folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+q'+n+n'} & \xrightarrow{s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'+n} \wedge 1} \mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'} & \xrightarrow{\eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V}} (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}) \wedge (\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}) \\
\downarrow & \downarrow t_{\mathbb{S}^r, \mathbb{S}^{r'} \wedge U, V \wedge T^{q+n}, T^{q'+n'}} & \downarrow \\
\mathbb{S}^{r'+r} \wedge U \wedge V \wedge T^{q'+q+n'+n} & \xrightarrow{s_{r', r} \wedge 1 \wedge t_{U, V} \wedge (-1)_T^{q+n'} \wedge 1} \mathbb{S}^{r'} \wedge \mathbb{S}^r \wedge V \wedge U \wedge T^{q'+n'} \wedge T^{q+n} & \xrightarrow{\eta_{q'+n', q+n}^{r', r, V, U}} (\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}) \wedge (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n})
\end{array}$$

wobei die rechte Abbildung die Permutation $t_{\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, \mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}}$ und die linke Abbildung

$\mathbb{S}^{t_{r, r'}} \wedge U \wedge V \wedge [((-1)_T^{q+n'} \wedge 1) t_{T^{q+n}, T^{q'+n'}} ((-1)_T^{q'+n} \wedge 1)]$ ist.

Für diese gilt: $((-1)_T^{q+n'} \wedge 1) t_{T^{q+n}, T^{q'+n'}} ((-1)_T^{q'+n} \wedge 1) = (-1)_T^{q+n'+(q+n)(q'+n')q'n} \wedge T^{q+q'+n+n'-1}$
 $= (-1)_T^{qq'+nn'} \wedge T^{q+q'+n+n'-1}$.

Falls $f : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \rightarrow R_n$ in \mathcal{D} eine zentrale Abbildung ist oder allgemeiner R kommutativ und $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n]$ ist, dann gilt in jedem Fall: $\chi_{n, n'} \circ \mu_{n, n'} \circ (f \wedge 1) = \mu_{n', n} \circ (1 \wedge f) \circ t_{\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_{n'}}$. Zusammen mit obigen Diagramm haben wir dann für $g \in [\mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}, R_{n'}]$:

$$\begin{aligned}
\chi_{n, n'}(f \cdot g)(1 \wedge (-1)_T^{nn'} \wedge 1) &= \chi_{n, n'} \circ \mu_{n, n'} \circ (f \wedge g) \circ \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \circ (s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'+n} \wedge 1) \circ (1 \wedge (-1)_T^{nn'} \wedge 1) \\
&= \mu_{n', n} \circ (g \wedge f) \circ [t_{\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, \mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}} \circ \eta_{q+n, q'+n'}^{r, r', U, V} \circ (s_{r, r'} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{q'+n} \wedge 1)] \circ (1 \wedge (-1)_T^{nn'} \wedge 1) \\
&= \mu_{n', n} \circ (g \wedge f) \circ [\eta_{q'+n', q+n}^{r', r, V, U} \circ (s_{r', r} \wedge 1 \wedge t_{U, V} \wedge (-1)_T^{q+n'} \wedge 1) \circ (\mathbb{S}^{t_{r, r'}} \wedge U \wedge V \wedge [(-1)_T^{qq'+nn'} \wedge 1])] \circ (1 \wedge (-1)_T^{nn'} \wedge 1) \\
&= (g \cdot f)(\mathbb{S}^{t_{r, r'}} \wedge 1 \wedge (-1)_T^{qq'} \wedge 1). \text{ Wegen der Semistabilität von } R \text{ gilt } [f \cdot g] = [\chi_{n, n'}(f \cdot g)(1 \wedge (-1)_T^{nn'} \wedge 1)],
\end{aligned}$$

womit die Behauptung über die Kommutativität folgt. \square

Um eine interne Multiplikation auf den stabilen Homotopiegruppen zu erhalten, werden wir im Folgenden voraussetzen, dass es zwei natürliche Transformationen $diag^U : U \rightarrow U \wedge U$ und $\omega_U : U \rightarrow S^0$ für jedes $U \in \mathcal{B}'$ gibt, so dass gilt:

1. (Assoziativität) $(diag^U \wedge U) \circ diag^U = (U \wedge diag^U) \circ diag^U$
2. (Einheit) $\rho_U \circ (U \wedge \omega_U) \circ diag^U = 1_U$ und $l_U \circ (\omega_U \wedge U) \circ diag^U = 1_U$
3. (Kommutativität) $t_{U, U} \circ diag^U = diag^U$

Mit anderen Worten: U ist ein kommutatives Comonoid-Objekt in \mathcal{D} .

Beispiel In $sSet_*$ oder $M.(S)$ haben wir $diag : K_+ \xrightarrow{diag} (K \times K)_+ \cong K_+ \wedge K_+$, falls K ein Objekt in $sSet$ bzw. $M(S)$ ist.

Wir setzen $l_{T^l}^2 := l_{T^l} \circ (S^0 \wedge l_{T^l})$ und c_l sei die Abbildung $\mathbb{S}^0 \wedge U \wedge T^l \xrightarrow{\cong \wedge \omega_U \wedge T^l} S^0 \wedge S^0 \wedge T^l \xrightarrow{l_{T^l}^2} T^l$. Insbesondere gilt also $c_l \wedge T^n = c_{l+n}$.

Proposition-Definition 7.4 (multiplikative Struktur auf den stabilen Homotopiegruppen). Sei R ein semistabiles symmetrisches T -Ringspektrum. Dann gibt es eine in R natürliche Struktur eines $N \times \mathbb{Z}$ -graduierten Monoiden auf $\pi_{*,*}^U(R) := \coprod_{(r,q) \in (N, \mathbb{Z})} \pi_{r,q}^U(R)$, die auf den Colimites durch folgende biadditiven Abbildungen ($q+n, q'+n' \geq 1$) induziert wird:

$\cdot : [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n] \times [\mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge T^{q'+n'}, R_{n'}] \rightarrow [\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge T^{q+q'+n+n'}, R_{n+n'}]$, dabei wird das Paar (f, g) auf die Komposition

$$\mathbb{S}^{r+r'} \wedge U \wedge T^{q+q'+n+n'} \xrightarrow{s_{r, r'} \wedge diag^U \wedge (-1)_T^{q'+n} \wedge 1} \mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'} \xrightarrow{\mathbb{S}^r \wedge t_{\mathbb{S}^{r'} \wedge U, U \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'}}} \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge T^{q'+n'} \xrightarrow{f \wedge g} R_n \wedge R_{n'} \xrightarrow{\mu_{n, n'}} R_{n+n'} \quad (q+n, q'+n' \geq 1)$$

geschickt. Das Produkt ist verträglich mit Vorzeichen. Es ist graduiert-kommutativ, falls R kommutativ ist:

$$f \cdot g = (-1)_T^{q \cdot q'} t_{r', r}(g \cdot f),$$

für $f \in \pi_{r,q}^U(R)$, $g \in \pi_{r',q'}^U(R)$.

Dafür, dass diese Gleichung gilt, genügt auch schon, dass f von einer zentralen Abbildung herkommt.

Wegen der Biadditivität kann die Monoidstruktur per Additivität zu einer $N \times \mathbb{Z}$ -graduierten (nicht-kommutativen) Ringstruktur auf $\bigoplus \pi_{*,*}^U(R) := \bigoplus_{(r,q) \in (N,\mathbb{Z})} \pi_{r,q}^U(R)$ fortgesetzt werden.

Beweis. Die Multiplikation lässt sich zerlegen in die „äußere“ Multiplikation aus Lemma 7.3 und der Präkomposition mit dem Diagonalmorphismus:

$$m_{r,q,r',q'}^{U,R} : \pi_{r,q}^U(R) \times \pi_{r',q'}^U(R) \xrightarrow{m_{r,q,r',q'}^{U,U,R}} \pi_{r+r',q+q'}^{U \wedge U}(R) \xrightarrow{\pi_{r+r',q+q'}^{diag^U}(R)} \pi_{r+r',q+q'}^U(R)$$

Denn die Abbildung $\mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'} \xrightarrow{1 \wedge t_{V,U} \wedge 1} \mathbb{S}^r \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge U \wedge V \wedge T^{q+n} \wedge T^{q'+n'} \xrightarrow{\eta_{q+n,q'+n'}^{r,r',U,V}}$
 $\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge \mathbb{S}^{r'} \wedge V \wedge T^{q'+n'}$ stimmt mit $\mathbb{S}^r \wedge t_{\mathbb{S}^{r'} \wedge V, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{q'+n'}$ überein, wie man durch die zugehörigen Permutationen sieht, und $diag^U$ ist kommutativ.

Demnach ist das Produkt wohldefiniert, biadditiv und assoziativ, denn $diag^-$ ist assoziativ. Es ist klar, dass das Produkt mit Vorzeichen verträglich. Außerdem ist es kommutativ, denn es gilt: $(diag^U)^* \circ t_{U,U}^* =$

$$(t_{U,U} \circ diag^U)^* = (diag^U)^*.$$

• Im vorherigen Lemma hatten wir die Aussage: $\iota_*(f) = [f \cdot \text{äußere}(\iota_1 \circ c)] \circ (\mathbb{S}^r \wedge \rho_U^{-1} \wedge T^{q+n+1})$, mit $c = l^T \circ l_{S^0 \wedge T} \circ ((S^0 \rightarrow S^0) \wedge 1) : S^0 \wedge S^0 \wedge T \rightarrow T$, wobei hier die äußere Multiplikation mit dem Punkt gemeint ist. Wegen $\rho_U^{-1} = (U \wedge \omega_U) \circ diag^U$ folgt: $\iota_*(f) = (f \cdot \text{äußere}(\iota_1 \circ c \circ (S^0 \wedge \omega_U \wedge T))) \circ (\mathbb{S}^r \wedge diag^U \wedge T^{q+n+1}) = (f \cdot \text{innere}(\iota_1 \circ c \circ (S^0 \wedge \omega_U \wedge T))) = (f \cdot \text{innere} \iota_1 c_1)$. Also ist in der stabilen Homotopiegruppe: $[f] = [\iota_*(f)] = [f] \cdot [\iota_1 c_1]$.

Außerdem gilt nach Lemma 7.3, da ι_1 und damit auch $\iota_1 c_1 : S^0 \wedge U \wedge T^{0+1} \rightarrow R_1$ zentral ist, dass:

$$[f] \cdot [\iota_1 c_1] = (-1)_{T^0}^{0,q} t_{0,r}([\iota_1 c_1] \cdot [f]) = [\iota_1 c_1] \cdot [f].$$

Damit ist $[\iota_1 c_1] \in \pi_{0,0}^U(X)$ die Einheit von $\pi_{*,*}^U(X)$. □

7.2 Lokalisierung von Ringspektren

Im folgenden werden die Bezeichnungen aus Definition 3.14 benutzt, insbesondere sei $x : T^l \rightarrow R_m$ ($l \geq 1$) eine zentrale Abbildung. Die nächsten Aussagen dienen als Vorbereitung des Theorems 7.8.

Corollar 7.5. Sei $f \in \pi_{r,q}^U(R[1/x])$. Dann gilt $f \cdot j_*([x c_l]) = j_*([x c_l]) \cdot ((-1)_T^{(l-m)q} f)$.

Beweis. Da nach Lemma 3.16 $j_m x$ und damit $j_m x c_l$ zentral ist, und $[j_m x c_l] = j_*([x c_l])$ gilt, folgt die Aussage aus dem Teil über Kommutativität in Proposition 7.4 (sowie $t_{0,r} = id$). □

Lemma 7.6. Sei R ein symmetrisches T -Ringspektrum und $x : T^l \rightarrow R_m$ eine zentrale Abbildung in \mathcal{D} . Sei $f : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \rightarrow R[1/x]_n$ eine Abbildung in $Ho(\mathcal{D})$ und $\hat{f} := ev \circ (f \wedge T^{ln}) : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge T^{ln} \rightarrow R_{(1+m)n}$. Dann ist die entsprechende Abbildung zu

$\iota_*^\alpha(\hat{f}) = \sigma_n^{\alpha, R[1/x]} \circ (f \wedge T^\alpha) : \mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge T^\alpha \rightarrow R[1/x]_{n+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, die Abbildung:

$$\begin{aligned} \iota_*^\alpha(\hat{f}) &:= ev \circ (\iota_*^\alpha(\hat{f}) \wedge T^{l(n+\alpha)}) \\ &= (1 + \xi_{m,\alpha}) \circ \mu_{(1+m)n+\alpha, m\alpha}^R \circ (\iota_*^\alpha(\hat{f}) \wedge x^\alpha) \circ (\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n} \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge T^{l\alpha}). \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $\sigma^{\alpha, R[1/x]} = \mu_{n,\alpha}^{R[1/x]} \circ (R[1/x]_n \wedge \iota_\alpha^{R[1/x]})$, $\iota_\alpha^{R[1/x]} = j_\alpha \circ \iota_\alpha^R$ und $\sigma^{\alpha, R} = \mu_{n,\alpha}^R \circ (R_n \wedge \iota_\alpha^R)$ gilt:

$$\begin{aligned} \iota_*^\alpha(\hat{f}) &= ev \circ (\iota_*^\alpha(\hat{f}) \wedge T^{l(n+\alpha)}) = ev \circ ([\mu_{n,\alpha}^{R[1/x]} \circ (f \wedge (j_\alpha \circ \iota_\alpha^R))] \wedge T^{l(n+\alpha)}) \\ &= \mu_{(1+m)n, (1+m)\alpha} \circ ((ev \circ (f \wedge T^{ln})) \wedge (ev \circ ((j_\alpha \circ \iota_\alpha^R) \wedge T^{l\alpha}))) \circ (1 \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge 1) \\ &= \mu_{(1+m)n, (1+m)\alpha} \circ (\hat{f} \wedge (\xi_{m,\alpha} \circ \mu_{\alpha, m\alpha}^R \circ (\iota_\alpha^R \wedge x^\alpha))) \circ (1 \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge 1) \\ &= (1 + \xi_{m,\alpha}) \circ \mu_{(1+m)n, (1+m)\alpha} \circ (1 \wedge \mu_{\alpha, m\alpha}^R) \circ (\hat{f} \wedge \iota_\alpha^R \wedge x^\alpha) \circ (1 \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge 1) \\ &= (1 + \xi_{m,\alpha}) \circ \mu_{(1+m)n+\alpha, m\alpha} \circ (\mu_{(1+m)n, \alpha} \wedge 1) \circ (\hat{f} \wedge \iota_\alpha^R \wedge x^\alpha) \circ (1 \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge 1) \\ &= (1 + \xi_{m,\alpha}) \circ \mu_{(1+m)n+\alpha, m\alpha} \circ (\iota_*^\alpha(\hat{f}) \wedge x^\alpha) \circ (1 \wedge t_{T^\alpha, T^{ln}} \wedge 1) \end{aligned}$$

□

Lemma 7.7. Sei R ein levelweise faserndes semistabiles symmetrisches T -Ringspektrum und $x : T^l \rightarrow R_m$ eine zentrale Abbildung. Seien $f, g \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R[1/x]_n]$ mit $\hat{f} = (-1)_T^r(\xi \circ \hat{g})$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $\xi \in \Sigma_{(1+m)n}$. Dann gilt $[f] = ((-1)_T^r |\xi|_T)[g]$ in $\pi_{r,q}^U(R[1/x])$.

Beweis. Da R semistabil ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass $\iota_*^\alpha(|\xi|_T(\xi \circ \hat{g})) = \iota_*^\alpha(\hat{g})$ gilt. Also ist:

$$\iota_*^\alpha(\hat{f}) = \iota_*^\alpha((-1)_T^\nu(\xi \circ \hat{g})) = (-1)_T^\nu|\xi|_T(\iota_*^\alpha(|\xi|_T(\xi \circ \hat{g}))) = (-1)_T^\nu|\xi|_T(\iota_*^\alpha(\hat{g})).$$

Mit Lemma 7.6 haben wir: $\widehat{\iota_*^\alpha(f)} = (-1)_T^\nu|\xi|_T\widehat{\iota_*^\alpha(g)} = \widehat{v}$ mit $v = [(-1)_T^\nu|\xi|_T]\iota_*^\alpha(g)$.

Wir können Lemma 2.8 benutzen, da R level-fasernd ist, und erhalten, dass die Abbildung

$$[\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n+\alpha}, \text{Hom}(T^{l(n+\alpha)}, R_{(1+m)(n+\alpha)})] \xrightarrow{ev \circ (-\wedge T^{l(n+\alpha)})} [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n+\alpha+l(n+\alpha)}, R_{(1+m)(n+\alpha)}]$$

injektiv ist. Somit ist $\iota_*^\alpha(f) = [(-1)_T^\nu|\xi|_T]\iota_*^\alpha(g)$. \square

Theorem 7.8. *Sei R ein levelweise faserndes semistabiles symmetrisches T -Ringspektrum und $x : T^l \rightarrow R_m$ eine zentrale Abbildung. Dann ist $R[1/x]$ semistabil und für alle $U \in \mathcal{B}'$ sind die Monoidabbildungen $\pi_{*,*}^U(R) \xrightarrow{j_*} \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ $[x_{c_l}]$ -Lokalisierungen (Def. von c_l steht vor Prop. 7.4, außerdem siehe Def. 7.9). Ebenso ist der Ringhomomorphismus $\oplus \pi_{*,*}^U(R) \xrightarrow{j_*} \oplus \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ eine $[x_{c_l}]$ -Lokalisierung.*

Beweis. • **Semistabilität:** Wir werden zeigen, dass der Zykeloperator d trivial auf $\pi_{r,q}^U(R[1/x])$ operiert (Lemma 4.3). Sei $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R[1/x]_n]$ ein Repräsentant von $\pi_{r,q}^U(R[1/x])$. Wir können annehmen, dass n gerade ist. Dann wird df von $\chi_{n,1} \circ \iota_*(f)$ repräsentiert, denn $|\chi_{n,1}|_T = 1$. Wir müssen zeigen, dass nach Stabilisierung $[\chi_{n,1} \circ \iota_*(f)] = [f] = [\iota_*(f)]$ gilt. Also lässt sich dies auf die Aussage zurückführen: sei $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R[1/x]_n]$ und $\gamma \in \Sigma_n$ mit $|\gamma|_T = 1$, dann gilt $[\gamma \circ f] = [f]$ in $\pi_{r,q}^U(R)$.

Dazu betrachten wir das Adjungierte $\widehat{\gamma \circ f} = ev \circ ((\gamma \circ f) \wedge T^{ln}) = \Delta_{1+m,n}(\gamma) \circ \hat{f} \circ (1 \wedge \Delta_{l,n}(\gamma)^{-1})$ (Def. 3.14). Da $|\gamma|_T^s = 1$ das Vorzeichen von $\Delta_{s,n}(\gamma)$ ist (Lemma 3.17), gilt: $\widehat{\gamma \circ f} = |\Delta_{1+m,n}(\gamma)|_T(\Delta_{1+m,n}(\gamma) \circ \hat{f})$ nach Definition 2.56. Mit Lemma 7.7 erhalten wir $[\gamma \circ f] = [f]$. Also ist $R[1/x]$ semistabil.

Lokalisierung: Nun wissen wir nach Proposition-Definition 7.4 auch, dass $\prod_{(r,q) \in (\mathbb{N}, \mathbb{Z})} \pi_{r,q}^U(R[1/x])$ ein Monoid ist und die Abbildung $j_* : \pi_{*,*}^U(R) \rightarrow \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ eine Abbildung von Monoiden. Es bleibt zu zeigen, dass j_* eine $[x_{c_l}]$ -Lokalisierung ist.

• Zunächst zeigen wir, dass $j_*([x_{c_l}])$ eine Einheit in $\pi_{*,*}^U(R[1/x])$ ist. Die Abbildung $j_m \circ x \circ c_l$ repräsentiert $j_*([x_{c_l}])$ und dieses Element hat $(\pm 1)_T[y_{c_{1+m}}]$ (bis auf das Vorzeichen) als Linksinverses, wobei $y : T^{1+m} \rightarrow R[1/x]_{1+l}$ die Abbildung ist, die adjungiert zu $\mu_{1+m+l,ml} \circ (\iota_{1+m+l} \wedge x^l)$ ist. Denn wir zeigen nun, dass $[(y_{c_{1+m}}) \cdot (j_m x_{c_l})]$ bis auf ein Vorzeichen gleich der Eins von $\pi_{*,*}^U(R)$ ist. Nach den Definitionen gilt: $f := (y_{c_{1+m}}) \cdot (j_m x_{c_l}) = \mu_{1+l,m}^{R[1/x]} \circ (y \wedge (j_m x)) \circ (c_{1+m} \wedge c_l) \circ (S^0 \wedge t_{S^0 \wedge U, U \wedge T^{1+m}} \wedge T^l) \circ (s_{0,0} \wedge \text{diag}^U \wedge (-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1)$

Das Adjungierte von f ist $(c := c_{1+m+l} \wedge T^{l(1+l+m)}, a := (1+m)(1+l))$:

$$\begin{aligned} \hat{f} &= ev \circ (f \wedge T^{l(1+l+m)}) = \mu_{(1+m)(1+l), (1+m)m} \circ ((ev \circ (y \wedge T^{l(1+l)})) \wedge (ev \circ (j_m x \wedge T^{lm}))) \\ &\circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ ((-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1) \circ c \\ &= \mu_{a, (1+m)m} \circ ((\mu_{1+m+l, ml} \circ (\iota_{1+m+l} \wedge x^l)) \wedge (\xi_{m, mm} \circ x^{1+m})) \circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ ((-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1) \circ c \\ &= (a + \xi_{m, mm}) \circ [\mu_{a, m+mm} \circ (\mu_{1+m+l, ml} \wedge 1)] \circ ((\iota_{1+m+l} \wedge x^l) \wedge x^{1+m}) \circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ ((-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1) \circ c \\ &= (a + \xi_{m, mm}) \circ [\mu_{1+m+l, ml+m+mm} \circ (1 \wedge \mu_{ml, m+mm})] \circ (\iota_{1+m+l} \wedge (x^l \wedge x^{1+m})) \circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ \\ &((-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1) \circ c \\ &= (a + \xi_{m, mm}) \circ \mu_{1+m+l, m(1+l+m)} \circ (\iota_{1+m+l} \wedge x^{1+l+m}) \circ c \circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ (1 \wedge (-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1). \end{aligned}$$

Es wurde $\mu_{sm, tm} \circ (x^s \wedge x^t) = x^{s+t}$ benutzt, was wegen der Assoziativität der iterierten Multiplikationsabbildungen von R gilt (siehe die Bemerkungen nach Def. 3.10).

Die Eins $[t_1^{R[1/x]}]c_1$ von $\pi_{*,*}^U(R)$ wird auch von $g := \iota_*^{l+m}(t_1^{R[1/x]}c_1) = t_{1+l+m}^{R[1/x]} \circ c_{1+l+m}$ repräsentiert, was adjungiert zu $\hat{g} = \xi_{m, 1+l+m} \circ \mu_{1+l+m, m(1+l+m)} \circ (\iota_{1+l+m} \wedge x^{1+l+m}) \circ c$ ist.

Also gilt $\hat{f} = \xi' \circ \hat{g} \circ (1 \wedge t_{T^l, T^{l(1+l)}} \wedge 1) \circ (1 \wedge (-1)_T^{(l-m)(1+l)} \wedge 1) = (-1)_T^\nu \xi' \circ \hat{g}$, mit $\xi' = (a + \xi_{m, mm}) \circ \xi_{m, 1+l+m}^{-1}$ und $\nu = l^2(1+l) + (l-m)(1+l)$. Nach dem Lemma 7.7 gilt darum $[f] = ((-1)_T^\nu|\xi'|_T)[g]$ und schließlich $((-1)_T^\nu|\xi'|_T)[y_{c_{1+m}}] \cdot j_*([x_{c_l}]) = ((-1)_T^\nu|\xi'|_T)[f] = [g] = 1$ in $\pi_{r,q}^U(R[1/x])$. Nach Corollar 7.5 hat $j_*([x_{c_l}])$ dann auch ein Rechtsinverses.

• Als nächstes zeigen wir, dass es zu jedem Element $z \in \pi_{*,*}^U(R[1/x])$ – repräsentiert durch $f \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R[1/x]_n]$ – ein $u \in \pi_{*,*}^U(R)$ und ein $p \in \mathbb{N}$ mit $z \cdot j_*([x_{c_l}])^p = j_*((\pm 1)_T u)$ gibt. Für u

wählen wir als Repräsentanten \hat{f} , und setzen $p = n$. Dann wird $j_*(u)$ von $g := j_{(1+m)n} \circ \hat{f}$ repräsentiert, was adjungiert zu

$$\hat{g} := ev \circ (g \wedge T^{l(1+m)n}) = \xi_{m,(1+m)n} \circ \mu_{(1+m)n,m(1+m)n} \circ (\hat{f} \wedge x^{(1+m)n})$$

ist. Das Element $z \cdot j_*([xc_l])^n = z \cdot j_*([xc_l] \cdot^n)$ wird von $h := f \cdot (j_{mn} \circ (xc_l) \cdot^n)$ repräsentiert.

Dabei ist $(xc_l) \cdot^n$ durch $x^n \circ ((-1)_T^{(l-m)m(n-1)n/2} \wedge 1) \circ c_{nl}$ gegeben, was durch Induktion bewiesen wird: $(x^n \circ ((-1)_T^{(l-m)m(n-1)n/2} \wedge 1) \circ c_{nl}) \cdot (xc_l) = \mu_{mn,m}^R \circ ((x^n \circ ((-1)_T^{(l-m)m(n-1)n/2} \wedge 1)) \wedge x) \circ ((-1)_T^{(l-m)mn} \wedge 1) \circ c_{(n+1)l} = x^{n+1} \circ ((-1)_T^{(l-m)m[(n-1)n/2+n]} \wedge 1) \circ c_{(n+1)l}$ (siehe auch die Berechnung von f beim letzten Punkt).

Wegen $h = \mu_{n,mn}^{R[1/x]} \circ (f \wedge (j_{mn} \circ (xc_l) \cdot^n)) \circ (\mathbb{S}^r \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln}) \circ (s_{r,0} \wedge \text{diag}^U \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{h} &= ev \circ (h \wedge T^{l(n+mn)}) = \mu_{(1+m)n,(1+m)mn}^R \circ [(ev \circ (f \wedge T^{ln})) \wedge (ev \circ ((j_{mn} \circ (xc_l) \cdot^n) \wedge T^{lmn}))] \\ &\circ (1 \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U \wedge T^{ln}, T^{ln}} \wedge 1) \circ (\mathbb{S}^r \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U, U \wedge T^{q+n}} \wedge 1) \circ (s_{r,0} \wedge \text{diag}^U \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1) \\ &= \mu_{(1+m)n,(1+m)mn}^R \circ [\hat{f} \wedge (\xi_{m,mn} \circ \mu_{mn,mn}^R \circ ((x^n \circ ((-1)_T^{(l-m)m(n-1)n/2} \wedge 1) \circ c_{nl}) \wedge x^{mn}))] \\ &\circ (1 \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U \wedge T^{ln}, T^{ln}} \wedge 1) \circ (\mathbb{S}^r \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U, U \wedge T^{q+n}} \wedge 1) \circ (s_{r,0} \wedge \text{diag}^U \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1) \\ &= (a' + \xi_{m,mn}) \circ \mu_{(1+m)n,(1+m)mn}^R \circ (\hat{f} \wedge (\mu_{mn,mn}^R \circ (x^n \wedge x^{mn})) \circ (1 \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2 + (l-m)m(n-1)n/2 + (ln)^2} \wedge 1)) \\ &= (a' + \xi_{m,mn}) \circ \mu_{(1+m)n,(1+m)mn}^R \circ (\hat{f} \wedge x^{(1+m)n}) \circ (1 \wedge (-1)_T^{(l-m)[n^2 + m(n-1)n/2 + (ln)^2] + (ln)^2} \wedge 1), \end{aligned}$$

mit $a' := (1+m)n$. Dabei wurde im vorletzten Schritt Folgendes benutzt:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge T^{ln} \wedge [l_{T^{ln}}^2 (\cong \mathbb{S}^0 \wedge \omega_U \wedge T^{ln})]) (U \wedge T^{q+n} \wedge t_{\mathbb{S}^0 \wedge U \wedge T^{ln}, T^{ln}}) (t_{\mathbb{S}^0 \wedge U, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln} \wedge T^{ln})] \wedge T^{lmn} \circ (s_{r,0} \wedge \text{diag}^U \wedge T^{\tilde{a}}) \\ = \mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge t_{T^{ln}, T^{ln}}) (U \wedge T^{q+n} \wedge l_{T^{ln}}^2 \wedge T^{ln}) (t_{\mathbb{S}^0 \wedge \mathbb{S}^0, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln})] \wedge T^{lmn} \circ (\rho_{\mathbb{S}^r}^{-1} \wedge ((\omega_U \wedge U) \text{diag}^U) \wedge T^{\tilde{a}}) \\ = \mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge (-1)_T^{(ln)^2} \wedge 1) \circ (U \wedge T^{q+n} \wedge l_{T^{ln}}^2 \wedge T^{ln}) \circ (t_{\mathbb{S}^0 \wedge \mathbb{S}^0, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln})] \wedge T^{lmn} \circ (\rho_{\mathbb{S}^r}^{-1} \wedge l_U^{-1} \wedge T^{\tilde{a}}) \\ = \mathbb{S}^r \wedge U \wedge (-1)_T^{(ln)^2} \wedge T^{\tilde{a}-1} \text{ mit } \tilde{a} := (q+n) + ln + l(n+mn). \end{aligned}$$

Also unterscheiden sich \hat{h} und \hat{g} nur um eine Permutation und ein Vorzeichen. Nach dem Lemma 7.7 gilt daher $z \cdot j_*([xc_l])^p = [h] = (\pm 1)_T [g] = (\pm 1)_T j_*(u) = j_*((\pm 1)_T u)$.

• Schließlich kommen wir dazu zu zeigen, dass für $[f], [g] \in \pi_{*,*}^U(R)$ mit $j_*([f]) = j_*([g])$ gilt:

$[f] \cdot [xc_l] \cdot^n = [g] \cdot [xc_l] \cdot^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir können annehmen, dass $f, g \in [\mathbb{S}^r \wedge U \wedge T^{q+n}, R_n]$ sind und $j_n \circ f = j_n \circ g$ gilt. Mit $(xc_l) \cdot^n = x^n \circ ((-1)_T^{(l-m)m(n-1)n/2} \wedge 1) \circ c_{nl}$ haben wir $f \cdot (xc_l) \cdot^n = \mu_{n,mn}^R \circ (f \wedge x^n) \circ (-1)_T^{(l-m)[m(n-1)n/2+n^2]} = \xi_{m,n}^{-1} \circ \widehat{j_n \circ f} \circ (-1)_T^{(l-m)[m(n-1)n/2+n^2]}$, denn $\mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge l_{T^{ln}}^2) \circ (U \wedge T^{q+n} \wedge \cong \mathbb{S}^0 \wedge \omega_U \wedge T^{ln}) \circ t_{\mathbb{S}^0 \wedge U, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln}] \circ (s_{r,0} \wedge \text{diag}^U \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1) = \mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge l_{T^{ln}}^2) \circ t_{\mathbb{S}^0 \wedge \mathbb{S}^0, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln}] \circ (\rho_{\mathbb{S}^r}^{-1} \wedge ((\omega_U \wedge U) \text{diag}^U) \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1) = \mathbb{S}^r \wedge [(U \wedge T^{q+n} \wedge l_{T^{ln}}^2) \circ t_{\mathbb{S}^0 \wedge \mathbb{S}^0, U \wedge T^{q+n}} \wedge T^{ln}] \circ (\rho_{\mathbb{S}^r}^{-1} \wedge l_U^{-1} \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1) = 1 \wedge (-1)_T^{(l-m)n^2} \wedge 1$. Gleiches gilt für g , weshalb $f \cdot (xc_l) \cdot^n = g \cdot (xc_l) \cdot^n$ und damit schließlich $[f] \cdot [xc_l] \cdot^n = [f \cdot (xc_l) \cdot^n] = [g \cdot (xc_l) \cdot^n] = [g] \cdot [xc_l] \cdot^n$ ist.

• Um den Beweis abzuschließen, benutzen wir die allgemeine Aussage über Monoide in Lemma 7.10, dessen Voraussetzungen in den letzten drei Punkten sowie in Corollar 7.5 gezeigt wurden. Dieses Corollar zeigt auch die weitergehende Aussage über $\oplus \pi_{*,*}^U(R)$ \square

7.3 Zur Lokalisierung von nicht-kommutativen Ringen

In diesem Abschnitt wird definiert, was Lokalisierungen von (nicht-kommutativen) Monoiden (bzw. Ringen) sind, und dann ein Spezialfall davon betrachtet. Diese entsprechen genau den Lokalisierung von Kategorien (siehe [Wei, S. 379 ff.]). Lokalisierungen von Monoiden (bzw. Ringen) treten auf, wenn man die stabilen Homotopiegruppen von Lokalisierungen von Ringspektren beschreiben möchte (siehe Abschnitt 7.2).

Definition 7.9. Seien M, N zwei Monoide (Ringe) und S eine Teilmenge von M . Dann ist ein Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) $j : M \rightarrow N$ eine S -Lokalisierung, falls

- das Bild $j(S)$ in den Einheiten von N ($N^\times := \{n \in N; \exists n' : nn' = n'n = 1\}$) liegt, und

- es zu jedem Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) $g : M \rightarrow P$ mit $g(S) \subset P^\times$ genau einen Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) $h : N \rightarrow P$ gibt, mit $g = h \circ j$.

Falls $S = \{x\}$ für ein $x \in M$, so heißt ein solcher Homomorphismus j auch x -Lokalisierung.

Bemerkung Mit anderen Worten: j ist initiales Objekt in der Unterkategorie der S -invertierenden Monoid-Homomorphismen (bzw. Ring-Homomorphismen) der Kategorie M/Mon (bzw. $M/Ring$). Damit ist j bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig.

Wir wollen nun einen Spezialfall betrachten.

Proposition 7.10. Seien M, N zwei Monoide (Ringe) und $x \in M$, so dass für jedes $x_1 \in M$ ein $x_2 \in M$ mit $x_1x = xx_2$ existiert. Falls ein Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) $j : M \rightarrow N$ die folgenden Eigenschaften

- 1.) es gibt $y, y' \in N$ mit $yj(x) = 1$ und $j(x)y' = 1$,
- 2.) für alle $z \in N$ gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ und ein $u \in M$ mit $zj(x)^p = j(u)$, und
- 3.) für $a, b \in M$ mit $j(a) = j(b)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ax^n = bx^n$

erfüllt, ist er eine x -Lokalisierung. Falls M, N graduierte Ringe, j ein graduirter Ringhomomorphismus und x ein homogenes Element in M ist, so ist j auch schon eine x -Lokalisierung, wenn obige Voraussetzungen für homogene Elemente (x_1, x_2, a, b) gelten.

Beweis. Aus 1.) folgt $y = yj(x)y' = y'$ und damit $j(x) \in N^\times$.

Sei $g : M \rightarrow P$ ein Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) mit $g(x) \in P^\times$. Dann definieren wir eine Abbildung $h : N \rightarrow P$, in dem wir $p \in \mathbb{N}_0$ und $u \in M$ mit $zj(x)^p = j(u)$ (nach Eigenschaft 2.)) wählen und $h(z) := g(u)(g(x)^{-1})^p$ setzen. Dies ist unabhängig von der Wahl von p und u , denn falls $zj(x)^{p'} = j(u')$ gilt, so haben wir $j(u'x^p) = j(ux^{p'})$ und nach 3.) dann $u'x^px^n = ux^{p'}x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt: $g(u')g(x)^p g(x)^n = g(u)g(x)^{p'} g(x)^n$ und $g(u)(g(x)^{-1})^p = g(u')(g(x)^{-1})^{p'}$.

Die Abbildung h ist ein Monoid-Homomorphismus: falls für $z, z' \in N$ Zerlegungen $zj(x)^p = j(u)$ und $z'j(x)^{p'} = j(u')$ gewählt sind, so gibt es nach Voraussetzung ein $u'_2 \in M$ mit $u'x^{p'} = x^{p'}u'_2$ und damit eine Zerlegung $[zz']j(x)^{p+p'} = zj(u')j(x)^p = zj(u'x^{p'}) = zj(x^{p'}u'_2) = zj(x)^{p'}j(u'_2) = j(u)j(u'_2) = j(uu'_2)$. Genauso folgt: $g(u')g(x)^{p'} = g(x)^{p'}g(u'_2)$ und somit $h(z)h(z') = [g(u)(g(x)^{-1})^p][g(u')(g(x)^{-1})^{p'}] = g(u)g(u'_2)(g(x)^{-1})^{p+p'} = g(uu'_2)(g(x)^{-1})^{p+p'} = h(zz')$. Offenbar ist $h(1) = 1$ wegen $1j(x)^0 = j(1)$. Wir können nach Multiplikation mit $j(x)$ annehmen, dass $p' = p$. In dem Fall von Ringen und Ringhomomorphismen erhalten wir dann mit $(z + z')j(x)^p = j(u + u')$ auch $h(z + z') = g(u + u')(g(x)^{-1})^p = g(u)(g(x)^{-1})^p + g(u')(g(x)^{-1})^p = h(z) + h(z')$.

Für $z = j(a)$ kann $p = 0$ und $u = a$ gewählt werden. Also ist $h(z) = g(a)$ und $h \circ j = g$. Umgekehrt, falls $h : N \rightarrow P$ ein Monoid-Homomorphismus (bzw. Ring-Homomorphismus) mit $h(x) \in P^\times$ und $h \circ j = g$ ist, so folgen aus der Gleichung $zj(x)^p = j(u)$ die Gleichungen $h(z)g(x)^p = g(u)$ und $h(z) = g(u)(g(x)^{-1})^p$.

Die verringerten Voraussetzungen im Fall von graduierten Ringen implizieren die Voraussetzungen im Fall von Ringen, denn:

- Falls $x_1 \in M$ beliebig ist, so ist x_1 die Summe von homogenen Elementen $x_{1,i} \in M$, für die es jeweils $x_{2,i}$ mit $x_{1,i}x = xx_{2,i}$ gibt, also mit Distributivität auch $x_1x = xx_2$.
- Falls $z \in N$ beliebig ist, so ist es Summe von endlich vielen homogenen Elementen $z_i \in N$, für die es nach Voraussetzung ein $p \in \mathbb{N}$ (das Maximum) und $u_i \in M$ gibt, so dass $z_i j(x)^p = j(u_i)$ und damit $zj(x)^p = j(u)$, wobei u die Summe der u_i ist.
- Falls $a, b \in M$ beliebig mit $j(a) = j(b)$ sind, so sind a, b jeweils Summen von homogenen a_i bzw. b_i in M , wobei i den (jeweils verschiedenen) Grad angibt und fast alle a_i und b_i Null sind. Da j graduiert ist, sind auch die $j(a_i)$ und die $j(b_i)$ homogen von Grad i , also gilt $j(a_i) = j(b_i)$. Nach Voraussetzung ist dann $a_i = b_i$, also $a = b$.

□

Literatur

- [Ba] H-J. Baues, A. Quintero, *Infinite Homotopy Theory*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups*. North-Holland, 1980.
- [DLØRV] B. I. Dundas, M. Levine, P. A. Østvær, O. Röndigs, V. Voevodsky, *Motivic homotopy theory*. Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway, August 2002, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
- [DRØ] B. I. Dundas, O. Röndigs, P. A. Østvær, *Motivic Functors*. Doc. Math. **8** (2003) 489–525.
- [DS] W. G. Dwyer, J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*. Handbook of algebraic topology, I.M. James, ed., North-Holland, Amsterdam (1995), 73–126.
- [GJ] P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*. Progress in mathematics Vol. **174**, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [Hi] P. S. Hirschhorn, *Model Categories and Their Localizations*. Mathematical Surveys and Monographs Vol. **99**, American Mathematical Society, 2003.
- [Hor] J. Hornbostel, *Motivic Chromatic Homotopy Theory*. Preprint, June 24, 2003, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0642/>.
- [Hov1] M. Hovey, *Model Categories*. Math. Survey and Monographs Vol. **63**, American Mathematical Society, 1999.
- [Hov2] M. Hovey, *Spectra and symmetric spectra in general model categories*. Preprint, June 9, 2000, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0402/>.
- [HSS] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, *Symmetric Spectra*. Preprint, March 4, 1998, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0265/>.
- [Is] D. C. Isaksen, *Flasque model structures for presheaves*. Preprint, arXiv:math/0401132v1 [math.AT] 13 Jan 2004.
- [Ja1] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*. Journal of Pure and Applied Algebra **47** (1987), 35–87, North-Holland.
- [Ja2] J. F. Jardine, *Motivic symmetric spectra*. Doc. Math. **5** (2000), 445–552.
- [ML] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, 1971.
- [Mo] F. Morel, *An introduction to \mathbb{A}^1 -homotopy theory*. In Contemporary Developments in Algebraic K-theory, ICTP Lecture notes **15** (2003), M. Karoubi, A.O. Kuku, C. Pedrini ed., 357-441.
- [Mo2] F. Morel, *Homotopy Theory of Schemes*. American Mathematical Society, 2006.
- [MV] F. Morel, V. Voevodsky, *\mathbb{A}^1 -homotopy theory of schemes*. Preprint, October 6, 1998, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0305/>.
- [PPR1] I. Panin, K. Pimenov, O. Röndigs, *On Voevodsky's algebraic K-theory spectrum BGL*. Preprint, April 17, 2007, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0838/>.
- [PPR2] I. Panin, K. Pimenov, O. Röndigs, *A universality theorem for Voevodsky's algebraic cobordism spectrum*. Preprint, May 31, 2007, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0846/>.
- [RO] O. Röndigs, P. A. Østvær, *Modules over motivic cohomology*. Advances in Mathematics, Volume 219, Issue 2, 1 October 2008, Pages 689-727.
- [RSØ] O. Röndigs, M. Spitzweck, P. A. Østvær, *Motivic strict ring models for K-theory*. Preprint, <http://arxiv.org/pdf/0907.4121v1>, July 23, 2009.

- [Sch07] S. Schwede, *An untitled book project about symmetric spectra*. Preprint v2.4 / July 12, 2007, <http://www.math.uni-bonn.de/people/schwede/SymSpec.pdf>.
- [Sch08M] S. Schwede, *On the homotopy groups of symmetric spectra*. *Geometry & Topology* **12** (2008), 1313–1344.
- [Sch08] S. Schwede, *Symmetric spectra*. Preprint v3.0 / April 9, 2008.
- [Sch09] S. Schwede, *Symmetric spectra*. Preprint v3.0 / May 6, 2009.
- [Sch07V] S. Schwede, *Vorlesung über symmetrische Spektren an der Universität Bonn im Wintersemester 2007*.
- [Se] M. Severitt, *Motivic homotopy types of projective curves*. Preprint, 2006, <http://www.math.uni-bielefeld.de/~mseverit/mseverittse.pdf>
- [SØ] M. Spitzweck, P. A. Østvær, *The Bott inverted projective space is homotopy algebraic K-theory*. *Bulletin of the London Mathematical Society* **41**(2): 281–292, Feb 19, 2009.
- [Vo1] V. Voevodsky, *The Milnor Conjecture*. Preprint, April 17, 2007, K-theory Preprint Archives, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0838/>.
- [Vo2] V. Voevodsky, \mathbb{A}^1 -homotopy theory. *Doc. Math. ICM I* (1998), 417–442. Vol. **10**(2), 2008, pp. 212–226.
- [Wei] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.