DIPLOMARBEIT

Vergleich von Brownschen Darstellbarkeitssätzen in triangulierten Kategorien

Angefertigt am
Mathematischen Institut

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

am 21. Dezember 2011

von

Dominik Nieder

aus
Winterberg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist der Vergleich verschiedener Brownscher Darstellbarkeitssätze in triangulierten Kategorien hinsichtlich ihrer Beweise und Anwendungsmöglichkeiten. Diese Sätze geben Kriterien dafür an, wann ein kontravarianter Funktor auf einer triangulierten Kategorie darstellbar ist.

0.1 Fragestellung

Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ ist eine additive Kategorie mit einer zusätzlichen Struktur: es gibt eine Auto-Äquivalenz Σ und eine Klasse exakter Dreiecke, d.h. Diagramme der Form

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$$

Diese exakten Dreiecke haben ähnliche Eigenschaften wie exakte Sequenzen in abelschen Kategorien, so ist z.B. in obigem exaktem Dreieck das Objekt X ein schwacher Kern von g und Z ist ein schwacher Kokern von f.

Ein kontravarianter Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ heißt darstellbar, wenn er isomorph zu einem Hom-Funktor ist, d.h. es gibt ein Objekt $X \in \mathscr{T}$ und einen natürlichen Isomorphismus

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, X) \xrightarrow{\cong} H$$

Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie und $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ ein darstellbarer Funktor. Wir nehmen weiterhin in dieser Arbeit an, dass $\mathscr{T}$ unter Koprodukten abgeschlossen ist. Dann hat H die folgenden Eigenschaften:

1. H ist kohomologisch, d.h. ein exaktes Dreieck in $\mathscr{T}$ von der Form

   $$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$$

   wird auf eine exakte Sequenz

   $$H(X) \xleftarrow{H(f)} H(Y) \xleftarrow{H(g)} H(Z) \xleftarrow{H(h)} H(\Sigma X)$$

von abelschen Gruppen abgebildet.

2. H bildet Koprodukte auf Produkte ab, d.h. für Objekte $X_i \in \mathscr{T}$ ($i \in I$, I eine beliebige Indexmenge) ist die kanonische Abbildung

$$H(\coprod_{i \in I} X_i) \to \prod_{i \in I} H(X_i)$$

ein Isomorphismus.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Frage, wann die Umkehrung dieser Aussage gilt, d.h. wann ein Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$, der 1. und 2. erfüllt, darstellbar ist. Die in dieser Arbeit untersuchten Darstellbarkeitssätze (Theorem 3.2.1, Theorem 3.4.3 und Theorem 4.1.5) haben daher alle die folgende Form:

0.1.1 THEOREM ***Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie, die abgeschlossen unter Koprodukten ist. $\mathscr{T}$ sei (in noch zu präzisierender Weise) erzeugt von einer Menge von Objekten T. Dann ist jeder Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$, der 1. und 2. erfüllt, darstellbar.***

0.2 Gliederung und wichtigste Ideen

Zur Struktur dieser Arbeit und zu den wichtigsten Beweisideen und Ergebnissen ist folgendes zu sagen:

Im ersten Kapitel werden Grundlagen aus den Bereichen der Kategorientheorie (Abschnitt 1.1) und der Mengenlehre (Abschnitt 1.2) wiederholt. Außerdem werden triangulierte Kategorien und Homotopie-Kolimites eingeführt und die wichtigsten Eigenschaften erläutert (Abschnitt 1.3). Es gibt verschiedene Arten, auf die eine triangulierte Kategorie von einer Menge von Objekten $T \subset \mathscr{T}$ erzeugt sein kann. Die entsprechenden Begriffe werden in Abschnitt 1.4 definiert.

Die Frage nach der Darstellbarkeit von Funktoren ist in der Topologie bereits 1962 für die Homotopiekategorie der CW-Komplexe mit Basispunkt gelöst worden. In [Br1] hat E.H. Brown den nach ihm benannten Brownschen Darstellbarkeitssatz bewiesen. Dieser Satz wird in Kapitel 2 wiedergegeben. Die Idee von Browns Beweis ist die explizite Konstruktion eines darstellenden Objekts aus einer erzeugenden Menge (im topologischen Fall die Menge der Sphären $\{\mathbb{S}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

Browns Beweis ist die Grundlage für die Beweise aller in Kapitel 3 behandelten Darstellbarkeitssätze. Wir untersuchen dabei die Resultate von A. Neeman ([Ne1] und [Ne2]) sowie H. Krause ([Kr2]) und vergleichen die Beweise.

In allen Fällen wird das einen Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ darstellende Objekt X als Homotopie-Kolimes einer Folge

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots$$

konstruiert, wobei die X_i im Wesentlichen aus Koprodukten der erzeugenden Objekte $t \in T$ entstehen. Die Funktoren $\operatorname{Hom}(-, X_i)$ approximieren dabei den Funktor H immer besser, bis schließlich $\operatorname{Hom}(-, X) \to H$ ein Isomorphismus ist.

Diese prinzipielle Strategie des Beweises ist in den drei behandelten Darstellbarkeitssätzen gleich. Daher werden die identischen Teile auch nur beim Beweis von Neemans Darstellbarkeitssatz für kompakt erzeugte Kategorien [Ne1] in Abschnitt 3.2 angegeben.

Neemans Darstellbarkeitssatz für wohl erzeugte Kategorien [Ne2] und Krauses Darstellbarkeitssatz für perfekt erzeugte Kategorien [Kr2] verallgemeinern dieses Resultat. Die verwendeten Techniken überschneiden sich, denn in beiden Fällen spielt die Analyse von Funktorkategorien eine wichtige Rolle. Diese Sätze werden in den Abschnitten 3.3 und 3.4 behandelt.

In Abschnitt 3.5 werden die Anwendungsbereiche der drei Darstellbarkeitssätze verglichen. Es stellt sich heraus, dass Krauses Darstellbarkeitssatz auch den zweiten Satz von Neeman verallgemeinert. Wir arbeiten den Beweis im Detail heraus und vergleichen ihn mit einem weiteren Ergebnis von Krause. Dabei wird auch der Zusammenhang mit zwei verschiedenen Definitionen einer wohl erzeugten Kategorie untersucht.

Der in Kapitel 4 behandelte Darstellbarkeitssatz von J. Franke unterscheidet sich in zweifacher Hinsicht von den bisher behandelten Sätzen. Einerseits sind stark erzeugte Kategorien nicht so leicht mit den in Kapitel 3 behandelten Kategorien vergleichbar. Andererseits ist auch der Beweisansatz ein anderer.

Während Neeman und Krause das darstellende Objekt direkt konstruieren, geht Franke einen anderen Weg. In den Voraussetzungen seines Darstellbarkeitssatzes wird die Existenz von essentiell kleinen triangulierten Unterkategorien $\mathscr{C}(\kappa) \subset \mathscr{T}$ (für genügend viele genügend große Kardinalzahlen κ) gefordert, die die Bedingung

$$\operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa \quad \forall t \in T \; \forall X \in \mathscr{C}(\kappa) \qquad (*)$$

erfüllen. Zum Beweis der Brownschen Darstellbarkeit werden dann für $\mathscr{C} := \mathscr{C}(\kappa)$ ein Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}}} : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ und ein natürlicher Isomorphismus $\phi : \widetilde{H_{\mathscr{C}}} \to H$ konstruiert. Dabei ist $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ selbst a priori kein Hom-Funktor, sondern ein Kolimes von Hom-Funktoren über einer aus $\widetilde{\mathscr{C}_H}$ hervorgehenden Indexkategorie. Es wird also nicht explizit ein darstellendes Objekt konstruiert.

Diese Konstruktion wird in den Abschnitten 4.1-4.4 diskutiert. In Abschnitt 4.5 geht es um die Verbindung mit einem Resultat aus [Hel], das die ursprüngliche Frage schließlich auf das Problem zurückführt, eine Lösungsmenge für H zu finden. Das ist für den zu H natürlich isomorphen Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ jedoch leicht möglich.

In Abschnitt 4.6 werden Frankes Resultate in Beziehung zu Kapitel 3 gesetzt. Da Frankes Beweis nur schwer mit Neemans und Krauses Beweisen zu vergleichen ist (abgesehen von der Verwendung von grundlegenden Fakten wie dem Yoneda-Lemma), wird an dieser Stelle der Zusammenhang zwischen den Voraussetzungen der Darstellbarkeitssätze untersucht. Wir erläutern hier ein weiteres Ergebnis von Krause, das eine Verbindung zwischen der Kardinalitätbedingung $(*)$ und Neemans wohl erzeugten Kategorien zieht. Daraus folgern wir anschließend einen Zusammenhang zwischen Neemans und Frankes Resultaten.

In den jeweils letzten Abschnitten der Kapitel 3 und 4 werden schließlich einige Beispiele für Kategorien angegeben, in denen sich die Darstellbarkeitssätze anwenden lassen. Die Beispiele stammen einerseits aus der Algebraischen Topologie, andererseits aus dem Bereich der derivierten Kategorien, die u.a. in der Algebraischen Geometrie und der Darstellungstheorie Anwendungen haben.

0.3 Danksagung

Ich danke an dieser Stelle Professor Jens Hornbostel dafür, dass er mein Interesse an der Topologie und Kategorientheorie geweckt hat, sowie für seine freundliche, geduldige und kompetente Art, mich bei der Entstehung dieser Diplomarbeit zu betreuen.
Ich danke meinen Eltern dafür, dass sie mir das Studium der Mathematik ermöglicht und mich dabei in jeder Hinsicht unterstützt haben.
Mein Dank gilt auch Judith, Monika, Nicolas und Sebastian für ihre Unterstützung in der letzten Phase meiner Diplomarbeit.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Kategorientheoretische Grundlagen

Da die wesentlichen Teile dieser Arbeit die Sprache der Kategorientheorie verwenden, werden hier einige grundlegende Begriffe der Kategorientheorie wiederholt, insbesondere die Definition eines darstellbaren Funktors und das Yoneda-Lemma. Außerdem werden Konventionen bzgl. Begrifflichkeiten und Notation eingeführt.

Kategorien haben in dieser Arbeit grundsätzlich kleine Hom-Mengen (-Gruppen, etc.), d.h. die Morphismen zwischen zwei Objekten bilden stets eine Menge.[1]
Sollten Kategorien vorkommen, in denen das nicht der Fall ist (d.h. in denen es zwei Objekte gibt, sodass die Morphismen zwischen diesen eine echte Klasse bilden), dann wird gesondert darauf hingewiesen. Solche „Kategorien" werden nach [ML] Metakategorien genannt (Metakategorien sind also eine Verallgemeinerung von Kategorien).

Die Notation $X \in \mathscr{C}$ bedeutet, dass X ein Objekt in der Kategorie $\mathscr{C}$ ist (unabhängig davon, ob $\mathscr{C}$ klein ist oder nicht, s. Def. 1.1.1).

1.1.1 Definition Eine Kategorie heißt klein, wenn ihre Objekte eine Menge bilden. Eine Kategorie heißt essentiell klein, wenn sie äquivalent zu einer kleinen Kategorie ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Isomorphieklassen von Objekten der Kategorie eine Menge bilden, denn man kann dann eine äquivalente kleine Kategorie betrachten, die je Isomorphieklasse genau ein Objekt besitzt. Mit dieser kleinen Kategorie sind dann die üblichen kategorientheoretischen Operationen wie Produkte und Koprodukte auch über *alle* Objekte der Kategorie möglich.

1.1.2 Definition Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie.
Ein Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ heißt darstellbar, wenn es ein Objekt $Y \in \mathscr{C}$ und einen natürlichen Isomorphismus $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, -)$ gibt.

[1] Vgl. [ML, Abschnitt I.8].

Analog dazu nennt man einen kontravarianten Funktor $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ darstellbar, wenn es ein Objekt $Y \in \mathscr{C}$ und einen natürlichen Isomorphismus $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, Y)$ gibt.

1.1.3 Bemerkung Unter Brownscher Darstellbarkeit versteht man das Angeben von allgemeinen Kriterien, unter denen (i.A. kontravariante) Funktoren darstellbar sind. E. H. Brown hat in den 1960er Jahren Funktoren $\mathbf{TOP_{CW_*}} \to \mathbf{SETS}_*$ (s. [Br1]) bzw. Funktoren auf etwas allgemeineren Kategorien (s. [Br2]) auf ihre Darstellbarkeit untersucht. Seine Ergebnisse werden in Kapitel 2 kurz zusammengefasst.
Im Hauptteil dieser Arbeit (Kapitel 3 und 4) werden Funktoren $\mathscr{T} \to \mathscr{Ab}$ untersucht, wobei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit gewissen Zusatzbedingungen ist. Weil die stabile Homotopiekategorie von CW-Spektren trianguliert ist und die Bedingungen der in Kapitel 3 untersuchten Darstellbarkeitssätze (nämlich A. Neemans [Ne1] bzw. [Ne2] und H. Krauses [Kr2]) erfüllt (s. Abschnitt 3.6), kann man Browns Resultat auch daraus folgern. Daher verallgemeinern diese beiden Sätze das topologische Problem auf eine abstrakt kategorientheoretische Aussage.

Ein sehr wichtiges Werkzeug für die Untersuchung von darstellbaren Funktoren ist das Yoneda-Lemma. Dazu benötigt man Funktorkategorien.

Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $x \in \mathscr{C}$ ein Objekt und $H : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ ein (kovarianter) Funktor. Die Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathscr{C}, \mathbf{SETS}) = \mathbf{SETS}^{\mathscr{C}}$ hat als Objekte alle Funktoren $\mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ und als Morphismen die natürlichen Transformationen α zwischen je zwei dieser Funktoren.[2] Insbesondere sind die Funktoren $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, -)$ und H Objekte in der Funktorkategorie. Das Yoneda-Lemma besagt nun, dass eine natürliche Transformation zwischen diesen beiden Funktoren bijektiv einem Element von $H(x)$ zuzuordnen ist:

1.1.4 Satz (Yoneda-Lemma) *[ML, S.61]*
Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie, $x \in \mathscr{C}$ ein Objekt und $H : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ ein Funktor. Dann ist die Abbildung

$$y : \mathrm{Hom}_{Fun(\mathscr{C},\mathbf{SETS})}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, -), H) \longrightarrow H(x), \quad (\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, -) \to H) \mapsto \alpha^x(1_x)$$

ein Isomorphismus von Mengen.

1.1.5 Korollar *Seien $x, y \in \mathscr{C}$. Dann ist jede natürliche Transformation zwischen darstellbaren Funktoren $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(x, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(y, -)$ induziert durch eine eindeutig bestimmte Abbildung $f : x \to y$, d.h. $\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f, -)$.*

1.1.6 Bemerkung

- Man kann die Zielkategorie $\mathbf{SETS}$ auch durch eine beliebige Kategorie $\mathscr{D}$ ersetzen, deren Objekte Mengen sind, z.B. die Kategorie der abelschen Gruppen $\mathscr{Ab} = \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$.

[2] Ist $\mathscr{C}$ keine kleine Kategorie, dann bilden auch die Morphismen in $\mathbf{SETS}^{\mathscr{C}}$ i.A. keine Menge mehr, d.h. es handelt sich um eine Funktor-Metakategorie. Die natürlichen Transformationen von einem Hom-Funktor zu einem anderen Funktor bilden jedoch immer eine Menge, vgl. [ML, Abschnitt III.2].

- Es gibt auch eine analoge kontravariante Version: Sei $H : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{SETS}$ und $x \in \mathscr{C}$. Dann ist auch

  $$\mathrm{Hom}_{Fun(\mathscr{C}^{op},\mathbf{SETS})}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,x), H) \to H(X)$$

  ein Isomorphismus, und analog gilt auch das Korollar.

- Die kontravariante Version wird in jedem Beweis eines Brownschen Darstellbarkeitssatzes explizit oder implizit in der folgenden Form verwendet: Für jeden Funktor $H : \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}$ und jedes Objekt x entspricht ein Element von $H(x)$ genau einer natürlichen Transformation von dem durch x dargestellten Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,x)$ zum Funktor H.

1.2 Ordinal- und Kardinalzahlen

An dieser Stelle werden kurz die in dieser Arbeit verwendeten mengentheoretischen Begriffe Ordinal- und Kardinalzahl erläutert. Wir beziehen uns dabei auf [Cie, Kapitel 4-5] sowie für die letzte Definition auf [Ne2, Abschnitt 3.1].

Ausgehend von der Definition der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ als Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ (wobei $n+1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt[3]), kann man die Ordinalzahlen als Verallgemeinerung ansehen:

1.2.1 Definition Eine Menge α heißt <u>Ordinalzahl</u>, wenn gilt:

(A_α) $\beta \in \alpha \;\Rightarrow\; \beta \subset \alpha$

(B_α) α ist total geordnet: $\beta, \gamma \in \alpha \;\Rightarrow\; \beta = \gamma$ oder $\beta \in \gamma$ oder $\gamma \in \beta$

(C_α) Jede Teilmenge hat ein kleinstes Element: $\emptyset \neq B \subset \alpha \;\Rightarrow\; \exists \gamma \in B : \gamma \cap B = \emptyset$

Jede natürliche Zahl $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ erfüllt diese Axiome und ist daher eine Ordinalzahl. Die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen ist ebenfalls eine Ordinalzahl, die auch mit ω bezeichnet wird.

Ebenfalls konsistent mit der Arithmetik der natürlichen Zahlen sind die folgenden Schreibweisen zur Vergleichbarkeit von Ordinalzahlen:

$$\alpha < \beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta \qquad\qquad \alpha \leq \beta \;:\Leftrightarrow\; \alpha \subset \beta$$

Jede wohlgeordnete Menge ist (ordnungs-)isomorph zu genau einer Ordinalzahl, sodass man auch sagen kann: Eine Ordinalzahl ist eine Ordnungsisomorphie-Äquivalenzklasse von wohlgeordneten Mengen. Da nach dem Wohlordnungssatz[4] jede Menge wohlgeordnet werden kann, kann man somit auch (wenn man das Auswahlaxiom voraussetzt, wie es in der heutigen Mathematik üblich ist) jede Menge als Ordinalzahl auffassen.

[3] Vgl. [Cie, Kapitel 3].

[4] [Cie, Satz 4.3.3]. Der Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Zorn'schen Lemma, vgl. auch [Bre, Theorem B.18].

1.2.2 BEISPIEL Neben den einzelnen natürlichen Zahlen und ω stellt auch der Ordnungstyp der wohlgeordneten Menge

$$\{1 - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$$

eine Ordinalzahl dar, die sozusagen „eine Zahl mehr“ als die natürlichen Zahlen enthält (diese „nächste Zahl“ entspricht nach obiger Definition der Zahl ω, die das größte Element von $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ ist).

Man kann nun die Summe von Ordinalzahlen als Konkatenation der jeweiligen wohlgeordneten Mengen definieren. Diese Operation ist i.A. nicht kommutativ!

1.2.3 DEFINITION Ist eine Ordinalzahl β von der Gestalt $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, dann wird sie Nachfolger-Ordinalzahl genannt und man schreibt auch $\beta = \alpha + 1$ (was konsistent mit der oben definierten Addition ist). Falls es kein solches α gibt, dann heißt β Limes-Ordinalzahl.

1.2.4 BEISPIEL

- Alle natürlichen Zahlen (außer 0) sowie die oben definierte Ordinalzahl $\omega + 1$ sind Nachfolger-Ordinalzahlen.
- ω ist eine Limes-Ordinalzahl, ebenso $\omega + \omega$.

1.2.5 DEFINITION Das Prinzip der transfiniten Induktion[5] funktioniert nun ähnlich wie das der vollständigen Induktion: Soll eine Aussage $A(\alpha)$ für alle Ordinalzahlen $\alpha \leq \kappa$ gezeigt werden, so genügt es, die folgenden drei Aussagen zu zeigen:

- $A(0)$
- $A(\alpha) \Rightarrow A(\alpha + 1)$ für beliebiges $\alpha < \kappa$
- Für jede Limes-Ordinalzahl $\lambda \leq \kappa$ gilt: $A(\alpha)\ \forall \alpha < \lambda \ \Rightarrow\ A(\lambda)$

Nun kommen wir zu den Kardinalzahlen, die im Verlaufe dieser Arbeit eine noch größere Rolle als die Ordinalzahlen spielen werden.

1.2.6 DEFINITION

1. Die Kardinalität einer Menge M ist die kleinste Ordinalzahl α, sodass es eine Bijektion von Mengen $M \leftrightarrow \alpha$ gibt (unabhängig von einer möglicherweise bestehenden Ordnung auf M). Sie wird mit $\mathrm{card}(M)$ bezeichnet.
2. Eine Kardinalzahl ist eine solche kleinste Ordinalzahl, d.h. eine Ordinalzahl κ, sodass $\kappa = \mathrm{card}(M)$ für eine Menge M gilt.

[5] Vgl. [Cie, Theorem 4.1.6].

1.2.7 Beispiel

- Alle natürlichen Zahlen sowie $\aleph_0 := \omega$ sind Kardinalzahlen.
- Die Ordinalzahlen $\omega + 1$ und $\omega + \omega$ sind keine Kardinalzahlen, da sie die gleiche Kardinalität wie ω haben.
- Jede unendliche Kardinalzahl ist zwangsläufig eine Limes-Ordinalzahl (ansonsten wäre sie nicht die kleinste Ordinalzahl der gegebenen Kardinalität).

Aufgrund des Satzes von Cantor[6] gibt es beliebig große Kardinalzahlen. Ist eine Kardinalzahl κ gegeben, dann gibt es immer genau eine nächstgrößere Kardinalzahl κ^+.

1.2.8 Definition Ist eine Kardinalzahl κ von der Gestalt $\kappa = \alpha^+$, dann wird sie auch Nachfolger-Kardinalzahl genannt. Gibt es kein solches α, dann heißt κ Limes-Kardinalzahl.

Induktiv können beliebig große Kardinalzahlen definiert werden:

$$\aleph_0 := \omega, \quad \aleph_1 := (\aleph_0)^+, \quad \ldots$$
$$\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+, \quad \aleph_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \text{ falls } \lambda \text{ Limes-Ordinalzahl}$$

Summe und Produkt zweier Kardinalzahlen werden als die Kardinalität der disjunkten Vereinigung bzw. des Produktes von zwei Mengen der entsprechenden Kardinalitäten definiert. Die Kardinalzahl κ^λ ist definiert als die Kardinalität der Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SETS}}(\lambda, \kappa)$.

1.2.9 Satz *[Cie, Proposition 5.2.1, Korollar 5.2.5, Theorem 5.2.13]*
Es gelten die folgenden Regeln:

1. *Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen sind kommutativ.*
2. *Seien $\kappa, \lambda \geq \aleph_0$. Dann gilt $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.*
3. *Für beliebige Kardinalzahlen κ, λ, μ gilt: $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{(\lambda\cdot\mu)}$.*

1.2.10 Bemerkung Es ist möglich, eine Indexmenge I (z.B. für (Ko-)Produkte) als eine Kardinalzahl $\kappa := \mathrm{card}(I)$ (und damit auch als Ordinalzahl) zu betrachten. Insbesondere kann man dann Teilindexmengen der Form $\{\alpha < \widetilde{\kappa}\}$ betrachten, wobei $\widetilde{\kappa} < \kappa$ irgendeine kleinere Ordinalzahl ist.

Die wichtigste Definition ist die folgende:

1.2.11 Definition Eine Kardinalzahl κ heißt singulär, wenn sie als Summe von weniger als κ Kardinalzahlen, die jeweils kleiner als κ sind, geschrieben werden kann. Wenn dies nicht möglich ist, heißt sie regulär.

[6] Für jede Menge X gilt $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$, s. [Cie, Theorem 5.1.6].

1.2.12 Bemerkung Anders gesagt: Wenn κ eine reguläre Kardinalzahl ist und $(M_\alpha)_{\alpha<\widetilde{\kappa}}$ weniger als κ Mengen (d.h. $\widetilde{\kappa} < \kappa$) mit $\mathrm{card}(M_\alpha) < \kappa$ $(\forall \alpha < \widetilde{\kappa})$ sind, dann gilt $\mathrm{card}(\bigcup_{\alpha<\widetilde{\kappa}} M_\alpha) < \kappa$ (wobei $\bigcup$ die disjunkte Vereinigung ist, d.h. das Koprodukt in **SETS**).
In dieser Umformulierung wurde von der oben angesprochenen Konvention, Indexmengen als Kardinalzahlen und ihre Elemente als Ordinalzahlen zu interpretieren, Gebrauch gemacht. Diese Notation wird auch in Kapitel 4 benutzt, in dem es um Frankes Version des Brownschen Darstellbarkeitssatzes in [Fra] geht.

1.2.13 Beispiel

- $\aleph_0$ ist regulär, denn eine endliche Summe natürlicher Zahlen ist wiederum eine natürliche Zahl (und somit endlich).
- Jede unendliche Nachfolger-Kardinalzahl ist regulär.[7]
- $\aleph_\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_n$ ist singulär.

Die Regularität von $\aleph_0$ kann man also auch so formulieren: Endliche disjunkte Vereinigungen endlicher Mengen (d.h. Koprodukte in **SETS**) sind endlich.
Die Regularität der unendlichen Nachfolger-Kardinalzahl $\aleph_1$ wiederum besagt: Abzählbare Koprodukte abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar.[8]

1.3 Triangulierte Kategorien

Die zentralen Kapitel dieser Arbeit (Kapitel 3 und 4) beschäftigen sich mit verschiedenen Varianten des Brownschen Darstellbarkeitssatzes in triangulierten Kategorien. In diesem Abschnitt werden die Definition und einige grundlegende Eigenschaften von triangulierten Kategorien zusammengefasst.

Triangulierte Kategorien wurden ursprünglich von Puppe und Verdier (unabhängig voneinander) in den 1960er Jahren eingeführt und haben ihre Wurzeln in der algebraischen Geometrie und der Homotopietheorie. Die Einführung in diesem Kapitel folgt in vielen Punkten dem Buch von A. Neeman über triangulierte Kategorien ([Ne2]). Als einführende Literatur über triangulierte Kategorien sind außerdem [Hap, Kap. 1], [Kr3, Kap. 2 und 3] und [Wei, Kap10] zu nennen.

Triangulierte Kategorien zeichnen sich durch die Existenz sogenannter exakter Dreiecke aus, die ähnliche Eigenschaften wie exakte Sequenzen[9] in abelschen oder exakten Kategorien[10] haben. Diese Dreiecke (engl. *triangles*) setzen einen sogenannten Suspen-

[7] Zum Beweis s. [Ne2, Abschnitt 3.1] oder [Cie, Theorem 3.3.5].

[8] Abzählbar bedeutet hier eine Kardinalität $\leq \aleph_0$, d.h. entweder endlich oder abzählbar unendlich.

[9] Insbesondere die für die algebraische Topologie zentralen langen exakten (Ko-)Homologie- bzw. Homotopiesequenzen von abelschen Gruppen.

[10] Exakte Kategorien sind eine Verallgemeinerung abelscher Kategorien, in der nicht alle Kerne und Kokerne existieren müssen.

sionsfunktor Σ voraus, der eine Auto-Äquivalenz der zugrundeliegenden Kategorie sein muss.

Die bekanntesten Beispiele für triangulierte Kategorien sind derivierte Kategorien von abelschen oder exakten Kategorien $D(\mathscr{A})$ sowie die stabile Homotopiekategorie SH. Der Suspensionfunktor ist im ersten Fall induziert vom Shift-(Verschiebe-)Funktor auf Kettenkomplexen und im zweiten Fall induziert durch den topologischen Suspensionsfunktor.

Die folgende Definition einer triangulierten Kategorie ist aus [Wei, Definition 10.2.5], wobei die Notation der exakten Dreiecke [Ne2] folgt.

1.3.1 Definition Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T} = (\mathscr{T}, \Sigma)$ ist eine additive Kategorie $\mathscr{T}$ zusammen mit einer additiven Auto-Äquivalenz $\Sigma : \mathscr{T} \stackrel{\cong}{\to} \mathscr{T}$ (genannt Translationsfunktor[11]) und einer Klasse von exakten Dreiecken[12], d.h. Diagrammen der Form

$$A \to B \to C \to \Sigma A$$

sodass die folgenden vier Axiome erfüllt sind:

(TR1)
- Sei $A \in \mathscr{T}$, dann ist $A \stackrel{1}{\to} A \to 0 \to \Sigma A$ ein exaktes Dreieck.
- Die Klasse der exakten Dreiecke ist abgeschlossen unter Isomorphismen, d.h. jedes Dreieck $A \to B \to C \to \Sigma A$, das (als Diagramm) isomorph zu einem exakten Dreieck ist, ist ebenfalls exakt.
- Jeder Morphismus $A \stackrel{u}{\to} B$ in $\mathscr{T}$ lässt sich zu einem exakten Dreieck der Form $A \stackrel{u}{\to} B \to C \to \Sigma A$ vervollständigen.

(TR2) *(Rotations-Axiom)* Sei ein exaktes Dreieck wie folgt gegeben:

$$A \stackrel{u}{\to} B \stackrel{v}{\to} C \stackrel{w}{\to} \Sigma A$$

Dann sind auch die folgenden beiden Diagramme exakte Dreiecke:

$$B \stackrel{v}{\to} C \stackrel{w}{\to} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma B \qquad\qquad \Sigma^{-1} C \xrightarrow{-\Sigma^{-1} w} A \stackrel{u}{\to} B \stackrel{v}{\to} C$$

(TR3) Seien zwei exakte Dreiecke

$$A \stackrel{u}{\to} B \stackrel{v}{\to} C \stackrel{w}{\to} \Sigma A \qquad\qquad A' \stackrel{u'}{\to} B' \stackrel{v'}{\to} C' \stackrel{w'}{\to} \Sigma A'$$

sowie Morphismen $A \stackrel{f}{\to} A'$ und $B \stackrel{g}{\to} B'$ mit $gu = u'f$ gegeben. Dann gibt es einen Morphismus $C \stackrel{h}{\to} C'$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \stackrel{u}{\to} & B & \stackrel{v}{\to} & C & \stackrel{w}{\to} & \Sigma A \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \Sigma f\downarrow \\ A' & \stackrel{u'}{\to} & B' & \stackrel{v'}{\to} & C' & \stackrel{w'}{\to} & \Sigma A' \end{array}$$

[11] Alternative Bezeichnungen sind Suspensions- oder Verschiebungs- (engl. *shift*-) Funktor.

[12] Diese werden auch ausgezeichnete Dreiecke (engl. *distinguished triangles*) genannt. Unter (Kandidaten-)Dreiecken versteht man hingegen einfach ein Diagramm dieser Art, welches nicht zwangsläufig die Axiome (TR1)-(TR4) erfüllen muss.

(TR4) *(Oktaeder-Axiom)* Seien drei exakte Dreiecke der Form

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{u_1} X \xrightarrow{u_2} \Sigma A$$

$$A \xrightarrow{w} C \xrightarrow{w_1} Z \xrightarrow{w_2} \Sigma A$$

$$B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{v_1} Y \xrightarrow{v_2} \Sigma B$$

gegeben, sodass $w = vu$ gilt. Dann existieren Morphismen $X \xrightarrow{f} Z$ und $Z \xrightarrow{g} Y$, sodass

$$X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{\Sigma(u_1)\circ v_2} \Sigma X$$

ein exaktes Dreieck ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$w_2 f = u_2 \qquad g w_1 = v_1 \qquad f u_1 = w_1 v \qquad v_2 g = \Sigma(u) w_2$$

Anders gesagt, das folgende Diagramm kommutiert und die dritte Spalte ist ein exaktes Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{u_1} & & X & & \xrightarrow{u_2} & \Sigma A \\
\| & & v\downarrow & & & f\downarrow & & & \| \\
A & \xrightarrow{w} & C & \xrightarrow{w_1} & & Z & & \xrightarrow{w_2} & \Sigma A \\
u\downarrow & & \| & & & g\downarrow & & & \Sigma u\downarrow \\
B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{v_1} & & Y & & \xrightarrow{v_2} & \Sigma B \\
& & & & \Sigma(u_1)\circ v_2 & & \searrow & & \swarrow \ \Sigma(u_1) \\
& & & & & & & \Sigma X &
\end{array}$$

Man kann dieses Diagramm auch dreidimensional zu einem Oktaeder anordnen, daher hat das Axiom seinen Namen.

1.3.2 Bemerkung

- Es gibt verschiedene Varianten der Definition, die sich z.T. nur leicht unterscheiden. Die Äquivalenz der Formulierungen ist meist leicht zu zeigen.
- Neeman definiert in [Ne2, Definition 1.3.13] ein völlig anderes Axiom (TR4') anstelle von (TR4) und leitet dann das oben angegeben Axiom (TR4) in [Ne2, Proposition 1.4.6] daraus ab.

Triangulierte Kategorien haben vorteilhafte Eigenschaften, die sie in vielen Zusammenhängen ähnlich gut beherrschbar wie abelsche Kategorien machen.

1.3.3 Lemma (Grundlegende Eigenschaften)

[Ne2, Lemma 1.1.6, Proposition 1.1.20, Remark 1.1.21, Prop. 1.2.1, Remark 1.2.2]
Sei $(\mathscr{T}, \Sigma)$ trianguliert.

1. *Sei ein exaktes Dreieck $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} \Sigma A$ in einer triangulierten Kategorie $\mathscr{T}$ gegeben. Dann gilt $vu = 0$, $wv = 0$ und $T(u)w = 0$. Außerdem ist v ein schwacher Kern von u und u ist ein schwacher Kokern von v.*[13]

[13] Dies folgt direkt aus (TR1) und (TR3).

2. *Σ vertauscht mit beliebigen Koprodukten: $\coprod_{\lambda\in\Lambda}(\Sigma X_\lambda) \cong \Sigma(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)$ für $X_\lambda \in \mathscr{T}$ und beliebige Indexmengen Λ.*
3. *Es gilt die folgende Variante des Fünferlemmas: Sei ein Morphismus von exakten Dreiecken gegeben, d.h. ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \stackrel{u}{\to} & B & \stackrel{v}{\to} & C & \stackrel{w}{\to} & \Sigma A \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \Sigma f\downarrow \\ A' & \stackrel{u'}{\to} & B' & \stackrel{v'}{\to} & C' & \stackrel{w'}{\to} & \Sigma A' \end{array}$$

   in dem beide Zeilen exakte Dreiecke sind. Falls f und g Isomorphismen sind, dann auch h.
4. *Die Wahl der Vervollständigung eines Morphismus $A \stackrel{u}{\to} B$ zu einem exakten Dreieck $A \stackrel{u}{\to} B \to C \to \Sigma A$ wie in (TR1) ist eindeutig bis auf Isomorphie. Das Objekt C wird der Kegel von f genannt und auch mit $C(f)$ bezeichnet.*
5. *Produkte und Koprodukte exakter Dreiecke sind exakt.*

1.3.4 Definition

- Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie, $\mathscr{A}$ eine abelsche Kategorie und $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ ein additiver Funktor. H heißt homologisch, wenn er exakte Dreiecke in $\mathscr{T}$ auf exakte Sequenzen in $\mathscr{A}$ abbildet.
- Ein kontravarianter additiver Funktor $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}$ heißt kohomologisch, wenn er als kovarianter Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}$ betrachtet ein homologischer Funktor ist.

1.3.5 Bemerkung Wegen (TR2) folgt daraus, dass für jedes exakte Dreieck der Form $A \stackrel{u}{\to} B \stackrel{v}{\to} C \stackrel{w}{\to} \Sigma A$ eine (in beide Richtungen unendliche) lange exakte Sequenz in $\mathscr{A}$ existiert:

$$\cdots \to H(\Sigma^{-1}C) \xrightarrow{H(\Sigma^{-1}w)} H(A) \stackrel{H(u)}{\to} H(B) \stackrel{H(v)}{\to} H(C) \stackrel{H(w)}{\to} H(\Sigma A) \to \cdots$$

Daher kann man für einige Beweise das Fünferlemma anwenden. Wenn H kontravariant und kohomologisch ist, gibt es eine lange exakte Sequenz in die andere Richtung.

1.3.6 Beispiel Die Hom-Funktoren von $\mathscr{T}$ in die Kategorie $\mathscr{Ab}$ der abelschen Gruppen sind die naheliegendsten Beispiele. Für jedes Objekt $X \in \mathscr{T}$ sind die Funktoren $\mathrm{Hom}(X,-)$ homologisch und $\mathrm{Hom}(-,X)$ kohomologisch.[14]

1.3.7 Definition Seien $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$ triangulierte Kategorien. Ein additiver Funktor $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ heißt trianguliert, wenn es einen in X natürlichen Isomorphismus $\phi_X : F(\Sigma X) \stackrel{\cong}{\to} \Sigma(F(X))$ gibt, sodass für jedes exakte Dreieck in $\mathscr{C}_1$

$$X \stackrel{u}{\to} Y \stackrel{v}{\to} Z \stackrel{w}{\to} \Sigma X$$

[14] [Ne2, Lemma 1.1.10, Remark 1.1.11]. Der Beweis ist elementar und benutzt die Axiome (TR1)-(TR3).

das folgende Dreieck in $\mathscr{C}_2$ ebenfalls exakt ist:

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\phi_X \circ F(w)} \Sigma(F(X))$$

Der natürliche Isomorphismus ϕ entfällt in der Notation oft.

1.3.8 Definition

1. Ein <u>schwaches Pushout</u> (bzw. Pullback) ist genau wie ein (gewöhnliches) Pushout (bzw. Pullback) definiert, nur dass die induzierten Abbildungen aus dem Pushout heraus (bzw. in das Pullback hinein) nicht eindeutig sein müssen.

2. Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie. In einem kommutativen Diagramm in $\mathscr{T}$ von der Form

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ g\downarrow & & g'\downarrow \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Z' \end{array}$$

heißt Z' <u>Homotopie-Pushout</u> von (f,g) und Y <u>Homotopie-Pullback</u> von (f',g'), wenn es eine Abbildung $\delta : Z' \to \Sigma Y$ gibt, sodass

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}} Y' \coprod Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} f', & g' \end{pmatrix}} Z' \xrightarrow{\delta} \Sigma Y$$

ein exaktes Dreieck ist.

1.3.9 Bemerkung Homotopie-Pushouts bzw. -Pullbacks in einer triangulierten Kategorie sind wegen Lemma 1.3.3 Punkt 1 genau die schwachen Pushouts bzw. Pullbacks in dieser Kategorie.

1.3.10 Definition

- Ist α eine Kardinalzahl, dann versteht man unter einem <u>α-Koprodukt</u> ein Koprodukt mit einer Indexmenge der Kardinalität $< \alpha$.
- Sei $\alpha \geq \aleph_0$ eine unendliche Kardinalzahl. Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ erfüllt das <u>Axiom (TR5(α))</u>, wenn sie abgeschlossen unter α-Koprodukten ist, d.h. für jede Menge Λ mit $\mathrm{card}(\Lambda) < \alpha$ und für beliebige Objekte $(X_\lambda \in \mathscr{T})_{\lambda\in\Lambda}$ existiert das Koprodukt $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ in $\mathscr{T}$.
- Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ erfüllt das <u>Axiom (TR5)</u>, falls $\mathscr{T}$ das Axiom (TR5(α)) für alle $\alpha \geq \aleph_0$ erfüllt, d.h. alle Koprodukte in $\mathscr{T}$ existieren.

1.3.11 Definition Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie, die (TR5($\aleph_1$)) erfüllt, und sei eine Folge von Objekten und Morphismen in $\mathscr{T}$ gegeben:

$$X_0 \xrightarrow{j_1} X_1 \xrightarrow{j_2} X_2 \xrightarrow{j_3} \cdots$$

Der Homotopie-Kolimes dieser Folge ist der (bis auf Isomorphie eindeutige) Kegel der Abbildung $\coprod_{i=0}^{\infty} X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_{i=0}^{\infty} X_i$, d.h. es gibt ein exaktes Dreieck der Form

$$\coprod_{i=0}^{\infty} X_i \xrightarrow{1-\text{shift}} \coprod_{i=0}^{\infty} X_i \to \operatorname{hocolim} X_i \to \Sigma(\coprod_{i=0}^{\infty} X_i)$$

Dabei ist unter der Funktion shift die direkte Summe der j_i zu verstehen.

1.3.12 Lemma (Eigenschaften von Hocolim)
[Ne2, Lemma 1.6.5, 1.6.6, 1.6.7, 1.7.1]

- *Die Konstruktion des Homotopie-Kolimes vertauscht mit endlichen direkten Summen.*
- *Der Homotopie-Kolimes der Folge* $X \xrightarrow{1} X \xrightarrow{1} X \xrightarrow{1} \cdots$ *ist* X.
- *Der Homotopie-Kolimes der Folge* $X_0 \xrightarrow{0} X_1 \xrightarrow{0} X_2 \xrightarrow{0} \cdots$ *ist* 0.
- *Eine Folge von Objekten und Morphismen hat (bis auf Isomorphie) denselben Homotopie-Kolimes wie jede unendliche Teilfolge (wobei die Abbildungen in der Teilfolge durch Komposition der ursprünglichen Abbildungen entstehen).*

Mit Hilfe von Homotopie-Kolimites kann man folgende Eigenschaft von triangulierten Kategorien mit abzählbaren Koprodukten beweisen.

1.3.13 Satz *[Ne2, Proposition 1.6.8]*
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert und erfülle (TR5($\aleph_1$)). Dann spalten alle Idempotente in $\mathscr{T}$: Sei ein Morphismus $e : X \to X$ in $\mathscr{T}$ mit $e^2 = e$ gegeben. Dann gibt es ein Objekt Y sowie Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $gf = e$ und $fg = 1_Y$.

1.4 Triangulierte Unterkategorien und Erzeuger

Ein wichtiges Thema sind verschiedene Arten von Unterkategorien von triangulierten Kategorien sowie verschiedene Arten des Erzeugens von solchen Unterkategorien.

1.4.1 Definition (Triangulierte Unterkategorien)

1. Eine volle Unterkategorie $\mathscr{S}$ einer triangulierten Kategorie $\mathscr{T}$ heißt triangulierte Unterkategorie, wenn sie abgeschlossen unter Isomorphismen, Translationen sowie Kegeln ist, d.h. für jeden Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ ist der Kegel $C(f)$, der f zu einem exakten Dreieck ergänzt, ebenfalls in $\mathscr{S}$.[15]

[15] Diese Definition ist äquivalent dazu, dass die $\mathscr{S}$ selbst trianguliert ist, also (TR1) bis (TR4) erfüllt, dass exakte Dreiecke in $\mathscr{T}$, deren Objekte in $\mathscr{S}$ liegen, auch exakte Dreiecke in $\mathscr{S}$ sind, und dass $\mathscr{S}$ in $\mathscr{T}$ abgeschlossen unter Isomorphismen ist. Alle Axiome bis auf die Abgeschlossenheit unter Σ, Isomorphismen und Kegeln werden nämlich von $\mathscr{T}$ vererbt.

2. Die triangulierte Hülle $\overline{T}$ einer Klasse von Objekten T in $\mathscr{T}$ ist die kleinste triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die T enthält.

3. Eine triangulierte Unterkategorie $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ heißt dick, wenn sie abgeschlossen unter direkten Summanden ist, d.h. falls $X \cong X_1 \coprod X_2$ und $X \in \mathscr{S}$, dann sind auch X_1 und X_2 in $\mathscr{S}$ enthalten.

4. Die dicke Hülle $\langle T \rangle^d$ einer Klasse von Objekten T in $\mathscr{T}$ ist die kleinste dicke Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die T enthält.[16]

5. Eine triangulierte Unterkategorie $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ heißt lokalisierend, wenn sie dick und abgeschlossen unter beliebigen Koprodukten (in $\mathscr{T}$) ist, d.h. falls X_λ Objekte in $\mathscr{S}$ sind ($\lambda \in \Lambda$, Λ beliebige Indexmenge), sodass $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \mathscr{T}$ existiert, dann ist auch $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \mathscr{S}$.[17]

6. Sei T eine Klasse von Objekten in $\mathscr{T}$. Dann bezeichnet man mit $\langle T \rangle$ die kleinste lokalisierende Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die T enthält, die sogenannte lokalisierende Hülle von T.

1.4.2 Bemerkung Es gilt für alle Klassen von Objekten $T \subset \mathscr{T}$:

$$\overline{T} \subset \langle T \rangle^d \subset \langle T \rangle$$

Im weiteren Verlauf werden verschiedene Arten von erzeugenden *Mengen* triangulierter Kategorien eine Rolle spielen:

1.4.3 Definition Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ wird klassisch erzeugt von einer Menge von Objekten T, wenn $\mathscr{T}$ die dicke Hülle von T ist, d.h. $\mathscr{T} = \langle T \rangle^d$.

1.4.4 Definition Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ wird erzeugt von einer Menge von Objekten T, wenn gilt: Aus $\mathrm{Hom}(T, x) = 0$ folgt $x = 0$. Anders gesagt, für jedes $x \neq 0$ gibt es einen nicht verschwindenden Morphismus $t \to x$ mit $t \in T$.
Eine solche Menge T wird Erzeugendensystem für $\mathscr{T}$ genannt.

Diese beiden Arten des Erzeugens hängen mit der lokalisierenden Hülle wie folgt zusammen:

1.4.5 Lemma *Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit (TR5) und T eine Menge von Objekten mit $\Sigma T \cong T$. Dann gilt:*

1. *Erzeugt T die Kategorie $\mathscr{T}$ klassisch (d.h. $\mathscr{T} = \langle T \rangle^d$), dann gilt auch $\mathscr{T} = \langle T \rangle$.*
2. *Wenn $\mathscr{T} = \langle T \rangle$ gilt, dann erzeugt T bereits $\mathscr{T}$ (im Sinne von Def. 1.4.4).*

[16] Die Schreibweise $\langle T \rangle^d$ ist nicht Standard und wird nur hier benutzt, um Verwechslungen mit der triangulierten oder lokalisierenden Hülle zu vermeiden.

[17] Ist $\mathscr{S}$ eine triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die abgeschlossen unter Koprodukten ist, und erfüllt $\mathscr{T}$ außerdem (TR5($\aleph_1$)), dann ist $\mathscr{S}$ automatisch dick, denn Idempotente spalten (vgl. Satz 1.3.13 und [Ne2, Remark 3.2.7]). Solange also das Axiom (TR5($\aleph_1$)) erfüllt ist, kann in der Definition von „lokalisierend" die Bedingung „dick" entfallen.

3. *Gilt $\mathscr{T} = \langle T \rangle^d$, dann wird $\mathscr{T}$ von T erzeugt.*

Beweis.

1. $\langle T \rangle$ ist nach Definition dick und enthält daher $\langle T \rangle^d$, die dicke Hülle von T. Aber es gilt $\langle T \rangle^d = \mathscr{T}$, also ist auch $\langle T \rangle = \mathscr{T}$.

2. Der Beweis dieses Punkts folgt [Ne2, Proposition 8.4.1].
   Sei $x \in \mathscr{T}$ mit $\mathrm{Hom}(T, x) = 0$. Sei $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ die volle Unterkategorie mit Objekten

   $$\mathrm{Ob}(\mathscr{S}) := \{s \in \mathscr{T} \mid \forall n \in \mathbb{Z} : \mathrm{Hom}(\Sigma^n s, x) = 0\}$$

   $\mathscr{S}$ ist trianguliert: Die Abgeschlossenheit unter Isomorphismen und unter Σ ist offensichtlich und die Abgeschlossenheit unter Kegeln folgt daraus, dass der Funktor $\mathrm{Hom}(-, x)$ kohomologisch ist. Außerdem ist $\mathscr{S}$ lokalisierend (abgeschlossen unter Koprodukten und direkten Summanden) und enthält T. Die kleinste Kategorie mit diesen Eigenschaften ist $\langle T \rangle$, daher gilt $\langle T \rangle \subset \mathscr{S}$. Aus der Voraussetzung $\langle T \rangle = \mathscr{T}$ folgt damit $\mathscr{S} = \langle T \rangle = \mathscr{T}$. Daher ist in ganz $\mathscr{T}$ jede Abbildung nach x die Nullabbildung, auch die Identität 1_X, also gilt $x = 0$.

3. Die Aussage folgt direkt aus 1 und 2.

□

1.4.6 Bemerkung 1. Punkt 3 gilt auch ohne (TR5): Ist $\mathscr{T}$ die dicke Hülle von T und gilt $\mathrm{Hom}(T, x) = 0$, dann entsteht x aus Objekten von T durch Kegel, Translationen und direkte Summanden.[18] Weil $\mathrm{Hom}(-, x)$ additiv und kohomologisch ist, folgt daraus $\mathrm{Hom}(x, x) = 0$ und damit auch $x = 0$.

2. Die Umkehrung von Punkt 2 gilt in den Fällen, die in Kapitel 3 behandelt werden, ebenfalls, s. Korollar 3.2.3, Korollar 3.3.15 und Korollar 3.4.4.

   Wenn eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ mit (TR5) kompakt erzeugt, wohl erzeugt oder perfekt erzeugt ist, dann gilt für jede Menge von Objekten $T \subset \mathscr{T}$:

   $$T \text{ erzeugt } \mathscr{T} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathscr{T} = \langle T \rangle$$

[18] Vgl. Konstruktion im Beweis von [Ne2, Proposition 3.2.4, 3.2.5], hier: Bem. 3.3.4.

Kapitel 2

Der klassische Brownsche Darstellbarkeitssatz

Der erste bekannte Satz über die Darstellbarkeit von kontravarianten Funktoren in der Topologie stammt von E. H. Brown. Er beweist in [Br1] zwei Fälle, einen über endliche CW-Komplexe und einen über beliebige CW-Komplexe. Wir zitieren hier nur die zweite Aussage.

Sei $\mathbf{TOP_{CW*}}$ die Kategorie der wegzusammenhängenden CW-Komplexe mit Basispunkt, Ho($\mathbf{TOP_{CW*}}$) ihre Homotopiekategorie und **SETS**$_*$ die Kategorie der punktierten Mengen.

Brown stellt folgende Forderungen an einen Funktor H : Ho$(\mathbf{TOP_{CW*}})^{op} \to$ **SETS**$_*$ auf.

e. **(e1)** $H(*) = *$ (wobei $*$ der einpunktige Raum bzw. die einpunktige Menge ist).

(e2) Seien $X_1, X_2 \subset X$ Komplexe mit gleichem Basispunkt, sodass $(X_1, X_1 \cap X_2)$ und $(X_2, X_1 \cap X_2)$ jeweils die Homotopieerweiterungseigenschaft (*homotopy extension property*) besitzen. Seien $j_i : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_i$ und $k_i : X_i \hookrightarrow X$ die Inklusionen. Wenn zwei Elemente $u_i \in H(X_i)$ $(i = 1, 2)$ die Bedingung $H(j_1)(u_1) = H(j_2)(u_2) \in H(X_1 \cap X_2)$ erfüllen, dann gibt es ein $v \in H(X)$ mit $H(k_i)(v) = u_i$ $(i = 1, 2)$. Gilt $X_1 \cap X_2 = *$, dann ist v eindeutig bestimmt.

w. H bildet Koprodukte von n-Sphären (für festes n) auf Produkte ab, d.h.

$$H(\bigvee_{i \in I} \mathbb{S}_i^n) \cong \prod_{i \in I} H(\mathbb{S}_i^n)$$

l. Sei X ein CW-Komplex zusammen mit einer aufsteigenden Folge von Unterkomplexen $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X$, sodass $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist. Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ das n-Skelett von X_n gleich dem n-Skelett von X. Sei außerdem $\operatorname{invlim}_n H(X_n)$ der inverse Limes der $H(X_n)$ bzgl. der von den Inklusionen $X_n \hookrightarrow X_{n+k}$ induzierten Abbildungen, und seien $i_n : X_n \hookrightarrow X$ die Inklusionen. Dann ist die Abbildung

$$\operatorname*{invlim}_n H(i_n) : H(X) \to \operatorname*{invlim}_n H(X_n)$$

ein Epimorphismus.

Axiom e (das Mayer-Vietoris-Axiom) ist notwendig, da unsere Kategorie $\mathbf{TOP}_{\mathbf{CW}*}$ nicht additiv ist. Der Teil (e2) ist eine Mayer-Vietoris-Bedingung (bzw. Exaktheitsbedingung) und entspricht in triangulierten Kategorien der Bedingung, dass der Funktor H kohomologisch sein soll.

Axiom w (das Wedge-Axiom) entspricht der (in allen Darstellbarkeitssätzen in Kapitel 3 und 4 gestellten) Bedingung, dass ein Funktor Koprodukte auf Produkte abbilden soll.

Axiom l (das Limes-Axiom) entspricht der Verwendung des Homotopie-Kolimes in triangulierten Kategorien (in Kapitel 3).

2.1 THEOREM (BROWN 1962) ***[Br1, Theorem I]***
Sei $H : \mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_{\mathbf{CW}*})^{op} \to$ SETS$_*$ ein kontravarianter Funktor, der die Axiome e, w und l erfüllt. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie (d.h. Homotopieäquivalenz) eindeutigen CW-Komplex Y und einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{TOP}_{\mathbf{CW}*})}(-, Y) \cong H$.

2.2 BEMERKUNG In [Br2, Theorem 2.8] hat Brown eine abstrakt kategorientheoretische Variante seines Darstellbarkeitssatzes bewiesen, die den obigen Satz verallgemeinert. Dazu definiert er den Begriff einer „Homotopiekategorie“ (nicht zu verwechseln mit der stabilen Homotopiekategorie oder der Homotopiekategorie einer Kategorie von Kettenkomplexen), die sich u.a. durch ein allgemeineres Mayer-Vietoris-Axiom und ein allgemeineres Limesaxiom auszeichnet. Darüber hinaus definiert er einen Homotopiefunktor als einen Funktor aus einer Homotopiekategorie in die Kategorie der Mengen, der Koprodukte auf Produkte und Mayer-Vietoris-Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet. Er beweist anschließend die Darstellbarkeit solcher Funktoren unter gewissen Bedingungen.

Der Beweis enthält keine topologischen Teile mehr und ist kürzer als der Beweis von Browns erstem Darstellbarkeitssatz in [Br1]. Die Idee von Browns Beweis wurde von Neeman auf kompakt erzeugte triangulierte Kategorien übertragen. Neemans Darstellbarkeitssatz und sein Beweis werden in Abschnitt 3.2 behandelt.

Kapitel 3

Brownsche Darstellbarkeit in kompakt erzeugten Kategorien und deren Verallgemeinerungen

Sei $\mathscr{T}$ eine additive Kategorie. Eine notwendige Bedingung dafür, dass ein Funktor $F : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ darstellbar ist, liegt darin, dass er Koprodukte auf Produkte abbildet. Denn alle (kontravarianten) Hom-Funktoren verhalten sich so aufgrund der universellen Eigenschaft des Koprodukts. Vorteilhaft an dieser Eigenschaft ist, dass die Inklusionen von direkten Summanden in ein Koprodukt unter F auf die Projektionen des entsprechenden Produkts auf seine Faktoren abgebildet werden.

Ist $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie, dann muss ein darstellbarer Funktor $F : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ auch kohomologisch sein, also exakte Dreiecke auf exakte Sequenzen abelscher Gruppen abbilden, da auch diese Eigenschaft auf alle Hom-Funktoren zutrifft (vgl. Beispiel 1.3.6).

Diese beiden Bedingungen sind unter gewissen Voraussetzungen an $\mathscr{T}$ sogar hinreichend für die Darstellbarkeit von F. Mit dieser Thematik haben sich unter anderem A. Neeman, H. Krause und J. Franke beschäftigt und Varianten des Brownschen Darstellbarkeitssatzes für verschiedene Arten von triangulierten Kategorien bewiesen.

In diesem Kapitel wird es um zwei Varianten von Neeman sowie den Satz von Krause gehen, während Frankes Darstellbarkeitssatz in Kapitel 4 behandelt wird.

Neemans Darstellbarkeitssatz gilt für kompakt erzeugte Kategorien ([Ne1]) bzw. deren Verallgemeinerung, wohl erzeugte Kategorien ([Ne2]). Sein Vorgehen bei kompakt erzeugten Kategorien, das sich auf das von Brown in [Br2] zurückführen lässt, wird in Abschnitt 3.2 erläutert. Die dazu benötigten Grundlagen über kompakt erzeugte Kategorien sind im ersten Abschnitt dieses Kapitels zu finden.

Der allgemeinere Fall wird in Abschnitt 3.3 erläutert; insbesondere wird definiert, was eine wohl erzeugte Kategorie ist. Der Beweis aus [Ne2] baut auf Neemans erstem Beweis in [Ne1] auf, verwendet aber zusätzlich eine umfangreiche Theorie über bestimmte

Funktorkategorien. Zudem werden die Hauptargumente auch bei Krause benutzt; aus diesem Grund gehen wir hier nur kurz auf Neemans eigentlichen Beweis ein.

Krause beweist in [Kr2] einen Darstellbarkeitssatz für perfekt erzeugte Kategorien mit Hilfe von kohärenten Funktoren. Sein Beweis, der in Abschnitt 3.4 behandelt wird, vereinfacht den Beweis von Neeman in [Ne2], indem eine andere Art von Funktorkategorie benutzt wird.

In Abschnitt 3.5 werden die Bedingungen an die Kategorien verglichen, in denen sich Neemans und Krauses Darstellbarkeitssätze anwenden lassen. Wir beweisen, dass jede wohl erzeugte Kategorie auch perfekt erzeugt ist und vergleichen diesen Beweis mit Krauses Beweis für ein Kriterium, das angibt, wann perfekt erzeugte Kategorien wohl erzeugt sind.

In Abschnitt 3.6 werden schließlich einige Beispiele für Kategorien angegeben, in denen ein Darstellbarkeitssatz nach Neeman oder Krause anwendbar (oder nicht anwendbar) ist. Im Wesentlichen werden Ergebnisse, u.a. aus anderen Arbeiten von Neeman und Krause, zusammengetragen und kurz erläutert.

3.1 Kompakt erzeugte Kategorien

3.1.1 Definition Ein Objekt c in einer Kategorie $\mathscr{C}$ heißt kompakt, wenn für jedes Koprodukt $\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ in $\mathscr{C}$ die natürliche Abbildung

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, x_\lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(c, \coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.

3.1.2 Bemerkung

1. Die obige natürliche Abbildung ist immer injektiv. Ein Objekt ist genau dann kompakt, wenn diese Abbildung für alle Koprodukte surjektiv ist, d.h. wenn jeder Morphismus von c in ein beliebiges Koprodukt $\coprod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ über ein Koprodukt $\coprod_{\lambda\in\Lambda'} x_\lambda$ mit *endlicher Indexmenge* $\Lambda' \subset \Lambda$ faktorisiert.
2. In triangulierten Kategorien gilt: Beliebige (De-)Suspensionen kompakter Objekte sind kompakt. Das liegt daran, dass Σ eine Auto-Äquivalenz ist und mit Koprodukten vertauscht (s. Lemma 1.3.3 Punkt 2).

3.1.3 Beispiel

1. Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der CW-Komplexe. Dann ist $\mathbb{S}^n$ kompakt für alle $n \geq 0$. Betrachtet als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer n-Zelle kann das Bild dieser Zellen unter einer Abbildung $\mathbb{S}^n \xrightarrow{f} \bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ jeweils nur eine endliche Anzahl von Zellen von $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ berühren. Daher gibt es eine endliche Teilmenge $\Lambda' \subset \Lambda$, sodass f über $\bigvee_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda$ faktorisiert. Analoges gilt, wenn man $\mathbb{S}^n$ durch einen beliebigen endlichen (d.h. im topologischen Sinne kompakten) CW-Komplex ersetzt.

2. In der stabilen Homotopiekategorie SH von CW-Spektren ist das Sphärenspektrum $\mathbb{S}^0$ ein kompaktes Objekt. Das folgt direkt aus Beispiel 1. Ebenso sind alle (De-)Suspensionen $\Sigma^n\mathbb{S}^0$ ($n \in \mathbb{Z}$) kompakt.

3.1.4 Definition Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ heißt kompakt erzeugt, wenn $\mathscr{T}$ (TR5) erfüllt und es eine Menge T von kompakten Objekten gibt, die $\mathscr{T}$ erzeugt (d.h. $\mathrm{Hom}(T, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, s. Definition 1.4.4).

3.1.5 Bemerkung Eine solche Menge T heißt dann Menge von kompakten Erzeugern oder kompaktes Erzeugendensystem. O.B.d.A. kann man annehmen, dass T (bis auf Isomorphie) abgeschlossen unter Suspension ist ($T \cong \Sigma T$), denn durch Hinzufügen aller $\Sigma^n t$ (mit $t \in T$, $n \in \mathbb{Z}$) bleibt T eine Menge kompakter und erzeugender Objekte.

Kompakte Objekte in triangulierten Kategorien haben eine schöne Eigenschaft bzgl. Homotopie-Kolimites (s. Defintion 1.3.11), die für den Beweis des Brownschen Darstellbarkeitssatzes für kompakt erzeugte triangulierte Kategorien von zentraler Bedeutung ist:

3.1.6 Satz *[Ne1, Lemma 2.8]*
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert und erfülle (TR5). Sei c ein kompaktes Objekt und

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

eine Folge von Objekten und Morphismen in $\mathscr{T}$. Dann gilt:

$$\mathrm{Hom}(c, \mathrm{hocolim}\, X_i) \cong \operatorname*{colim}_i \mathrm{Hom}(c, X_i)$$

Beweis. Wendet man den kovarianten Funktor $\mathrm{Hom}(c, -)$ auf das exakte Dreieck an, welches den Homotopie-Kolimes definiert, so erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} X_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} X_i) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(c, \mathrm{hocolim}\, X_i)$$
$$\to \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} \Sigma X_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} \Sigma X_i)$$

von abelschen Gruppen. Weil c kompakt ist, passt die Abbildung $(1 - \mathrm{shift})$ ganz rechts in ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\geq 0} \mathrm{Hom}(c, \Sigma X_i) & \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} & \coprod_{i\geq 0} \mathrm{Hom}(c, \Sigma X_i) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} \Sigma X_i) & \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} & \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} \Sigma X_i) \end{array}$$

Die obere Abbildung $(1-\mathrm{shift})$ ist injektiv, weil $(1-\mathrm{shift}) : \coprod_{i\geq 0} X_i \to \coprod_{i\geq 0} X_i$ injektiv ist und der Funktor $\mathrm{Hom}(c, -)$ linksexakt ist. Daher muss γ in der langen exakten Sequenz surjektiv sein, und $\mathrm{Hom}(c, \mathrm{hocolim}\, X_i)$ ist der Kokern der Abbildung

$$\mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} X_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \mathrm{Hom}(c, \coprod_{i\geq 0} X_i)$$

Andererseits ist $\mathrm{colim}_i \mathrm{Hom}(c, X_i)$ (in der Kategorie $\mathscr{Ab}$) genau als dieser Kokern definiert. Aus der Eindeutigkeit von Kokernen folgt dann die Behauptung. □

3.2 Neemans Darstellbarkeitssatz und sein Beweis

In kompakt erzeugten Kategorien sind die darstellbaren Funktoren genau die kohomologischen Funktoren, die Koprodukte auf Produkte abbilden:

3.2.1 THEOREM (NEEMAN 1996/2001) ***[Ne1, Theorem 3.1 / Ne2, Prop. 8.4.2.1] Sei $\mathscr{T}$ eine das Axiom (TR5) erfüllende triangulierte Kategorie, die entweder kompakt erzeugt oder wohl erzeugt[1] ist. Dann ist jeder kohomologische Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$, der Koprodukte in $\mathscr{T}$ auf Produkte in $\mathscr{Ab}$ abbildet, darstellbar. Es gibt also ein Objekt $Y \in \mathscr{T}$ und einen natürlichen Isomorphismus $H \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, Y)$.***

3.2.2 BEMERKUNG

1. Neeman hat in [Ne1] den Fall für kompakt erzeugte Kategorien bewiesen. Das eigentliche Ziel in seinem Artikel war es, die Grothendieck-Verdier-Dualität für bestimmte Kategorien von Schemata auf abstrakt kategorientheoretischem Wege zu beweisen.
2. Der allgemeinere Fall für wohl erzeugte Kategorien ist in Neemans Buch [Ne2] ausführlich behandelt worden. Das Hauptargument ist bereits im folgenden Beweis für den kompakt erzeugten Fall vorhanden. Es wird jedoch für einen Beweisschritt die in [Ne2] entwickelte Theorie über perfekte Erzeuger und große Kardinalzahlen benötigt (s. Abschnitt 3.3).
3. Neemans Beweis orientiert sich vom Aufbau her und im Hauptargument an Browns Beweis in [Br2], welcher wiederum eine abstraktere Variante von [Br1] ist. Allerdings benutzt Neeman die Struktur von triangulierten Kategorien, wodurch die eigentliche Konstruktion klarer wird.

Beweis. Der Beweis erfolgt in sechs Schritten und wird hier im Detail ausgeführt. Die Beweise von Neemans zweitem Darstellbarkeitssatz (s. Abschnitt 3.3) und Krauses Darstellbarkeitssatz (s. Abschnitt 3.4) bauen auf diesem Beweis auf.

1. Sei zunächst T ein kompaktes Erzeugendensystem (bzw. im Fall einer wohl erzeugten Kategorie ein β-kompaktes Erzeugendensystem, wobei β eine reguläre Kardinalzahl ist, siehe Abschnitt 3.3) von $\mathscr{T}$, insbesondere also eine Menge von Objekten. Es kann wegen Bemerkung 3.1.5 angenommen werden, dass (bis auf Isomorphie) $\Sigma T = T$ gilt. Sei eine Indexmenge U_0 durch
$$U_0 := \bigcup_{t \in T} H(t)$$
definiert. Ein Element der Menge U_0 ist von der Gestalt (α, t), wobei $t \in T$ ein Objekt aus dem Erzeugendensystem und $\alpha \in H(t)$ ist. Man definiert nun ein Koprodukt, in dem jedes Objekt $t \in T$ entsprechend $\mathrm{card}(H(t))$ oft vorkommt.
$$X_0 := \coprod_{(\alpha,t) \in U_0} t := \coprod_{t \in T} \coprod_{\alpha \in H(t)} t$$

[1] S. Abschnitt 3.3.

Dann liegt X_0 in der lokalisierenden Hülle $\langle T \rangle$ und $H(X_0) = \prod_{(\alpha,t)\in U_0} H(t)$, weil H Koprodukte auf Produkte abbildet. Sei $\alpha_0 \in H(X_0)$ das kanonische Element, welches auf einem Faktor mit Index (α, t) den Wert $\alpha \in H(t)$ hat. Durch Anwendung des Yoneda-Lemmas (Satz 1.1.4) erhält man eine α_0 zugeordnete natürliche Transformation ϕ_0, die α_0 zurückzieht:

$$\phi_0 : \mathrm{Hom}(-, X_0) \to H, \qquad \phi_0^Y(Y \xrightarrow{f} X_0) = H(f)(\alpha_0)$$

Für $t \in T$ ist $\phi_0^t : \mathrm{Hom}(t, X_0) \to H(t)$ stets surjektiv, da jedes Element $\alpha \in H(t)$ das Bild der Inklusion des Summanden mit Index (α, t) in X_0 ist.

2. Induktiv werden für $i \in \mathbb{N}$ weitere Indexmengen U_i, Objekte X_i, kanonische Elemente $\alpha_i \in H(X_i)$ und diesen Elementen zugeordnete natürliche Transformationen ϕ_i definiert:

   Sei $i \geq 0$ und seien X_i, α_i und ϕ_i wie oben gegeben. Ein Element der nächsten Indexmenge
$$U_{i+1} := \bigcup_{t\in T} ker\left(\phi_i^t : \mathrm{Hom}(t, X_i) \to H(t)\right)$$
   ist von der Form (f, t), wobei $t \in T$ und $f : t \to X_i$ mit $H(f)(\alpha_i) = 0$ ist. Als nächstes wird über U_{i+1} aufsummiert:

$$K_{i+1} := \coprod_{(f,t)\in U_{i+1}} t = \coprod_{t\in T} \coprod_{\substack{f:t\to X_i \text{mit} \\ H(f)(\alpha_i)=0}} t$$

   Sei $v_{i+1} : K_{i+1} \to X_i$ die Abbildung, die auf dem Summanden mit Index (f, t) durch $f : t \to X_i$ definiert ist. Sei nun X_{i+1} der Kegel von v_{i+1}, also definiert durch das exakte Dreieck
$$K_{i+1} \xrightarrow{v_{i+1}} X_i \xrightarrow{w_{i+1}} X_{i+1} \to \Sigma K_{i+1}$$
   In der daraus resultierenden exakten Sequenz abelscher Gruppen

$$\cdots \to H(X_{i+1}) \xrightarrow{H(w_{i+1})} H(X_i) \xrightarrow{H(v_{i+1})} H(K_{i+1}) = \prod_{(f,t)\in U_{i+1}} H(t) \to \cdots$$

   wird $\alpha_i \in H(X_i)$ auf Null abgebildet, weil K_{i+1} gerade so definiert wurde. Daher gibt es ein $\alpha_{i+1} \in H(X_{i+1})$ mit $H(w_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$. Anders gesagt, es gibt eine natürliche Transformation

$$\phi_{i+1} : \mathrm{Hom}(-, X_{i+1}) \to H$$

   sodass $\phi_{i+1} \circ (w_{i+1})^* = \phi_i$ gilt:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(-, X_i) \arrow[dl, "(w_{i+1})^*"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\ \mathrm{Hom}(-, X_{i+1}) \arrow[rr, "\phi_{i+1}"] & & H \end{tikzcd}$$

Für $t \in T$ ist ϕ_i^t surjektiv (s. Schritt 1 bzw. Induktionsannahme), und aufgrund des obigen Diagramms gilt dies auch für ϕ_{i+1}^t. Da die Kerne dieser surjektiven Abbildungen jeweils herausgeteilt werden, sind die Gruppen $\mathrm{Hom}(t, X_i)$ für wachsendes i eine immer bessere Approximation an $H(t)$ (für kompakte Erzeuger $t \in T$). Daher ist die Kolimesbildung im folgenden Schritt plausibel.

3. Wir haben eine unendliche Folge

$$X_0 \overset{w_1}{\to} X_1 \overset{w_2}{\to} X_2 \to \cdots$$

konstruiert, sowie für alle $i \geq 0$ ein $\alpha_i \in H(X_i)$ mit $H(w_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$.

Sei $X := \mathrm{hocolim}\, X_i$ (s. Definition 1.3.11). Es ist zu bemerken, dass sowohl X_i als auch X nach Konstruktion in $\langle T \rangle$ liegen, denn X ist der Kegel der Abbildung $1 - \mathrm{shift}$, die in $\langle T \rangle$ liegt. Durch Anwenden von H auf das exakte Dreieck

$$\coprod_i X_i \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \coprod_i X_i \overset{w}{\to} X \to \Sigma(\coprod_i X_i)$$

ergibt sich eine exakte Sequenz abelscher Gruppen

$$H(X) \xrightarrow{H(w)} \prod_i H(X_i) \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \prod_i H(X_i)$$

wobei ausgenutzt wird, dass H Koprodukte auf Produkte abbildet. Das Element $\prod_i \alpha_i \in \prod_i H(X_i)$ liegt im Kern der Abbildung $(1 - \mathrm{shift})$, weil die Strukturabbildung des Homotopie-Kolimes die Wirkung $w_i(\alpha_i) = \alpha_{i-1}$ $(\forall i \geq 1)$ hat. Daher gibt es ein $\alpha \in H(X)$ mit $H(w)(\alpha) = \prod_i \alpha_i$. Durch erneutes Anwenden des Yoneda-Lemmas erhält man eine damit korrespondierende natürliche Transformation $\phi : \mathrm{Hom}(-, X) \to H$, sodass das folgende Diagramm für alle $i \geq 0$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}(-, X_i) & \\ (\widetilde{w_i})^* \swarrow & & \searrow \phi_i \\ \mathrm{Hom}(-, X) & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

Die Abbildung $(\widetilde{w_i})^*$ kommt dabei von der Zerlegung der Abbildung

$$w = (\widetilde{w_0}, \widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots) : \coprod_i X_i \to X$$

in der Konstruktion des Homotopie-Kolimes.

Um den Darstellbarkeitssatz zu beweisen, muss gezeigt werden, dass ϕ ein natürlicher Isomorphismus ist. Zunächst wird dazu gezeigt, dass $\phi^t : \mathrm{Hom}(t, X) \to H(t)$ für alle $t \in T$ ein Isomorphismus ist. Sei also $t \in T$ ein kompaktes Objekt.

4. ϕ^t ist surjektiv:

Das gilt nach Konstruktion, denn im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}(t, X_0) & \\ (\widetilde{w_0^t})^* \swarrow & & \searrow \phi_0^t \\ \mathrm{Hom}(t, X) & \xrightarrow{\phi^t} & H(t) \end{array}$$

ist ϕ_0^t surjektiv, daher auch ϕ^t.

5. ϕ^t ist injektiv:

   An dieser Stelle muss zwischen dem kompakt erzeugten und dem wohl erzeugten Fall unterschieden werden. Fall 1 wird hier, weiterhin [Ne1] folgend, bewiesen. Für Fall 2 wird auf Abschnitt 3.3 und [Ne2] verwiesen.

   Sei $f \in \mathrm{Hom}(t, X)$ mit $\phi^t(f) = 0$, d.h. $H(f)(\alpha) = 0$. Weil t kompakt ist, lässt sich Satz 3.1.6 anwenden:

   $$\mathrm{Hom}(t, X) = \mathrm{Hom}(t, \mathrm{hocolim}\, X_i) \cong \mathrm{colim}\, \mathrm{Hom}(t, X_i)$$

   Daher gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ und ein $f_i : t \to X_i$ mit $f = \widetilde{w_i^t} \circ f_i$.

   Es handelt sich um ein sogenanntes *small object argument*, da das in der Konstruktion auftauchende Objekt X_i, über das nun faktorisiert wird, „weniger komplex“ als das „große“ Objekt X ist.

   Im Diagramm

   $$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(t, X_i) \arrow[dl, "(\widetilde{w_i^t})^*"'] \arrow[dr, "\phi_i^t"] & \\ \mathrm{Hom}(t, X) \arrow[rr, "\phi^t"] & & H(t) \end{tikzcd}$$

   gilt nach Konstruktion $((\widetilde{w_i^t})^*)(f_i) = \widetilde{w_i^t} \circ f_i = f$, und f wird durch die untere Abbildung auf Null abgebildet. Daher ist auch $\phi_i^t(f_i) = \phi^t(\widetilde{w_i^t} \circ f_i) = \phi^t(f) = 0$. Also ist f_i im Kern von ϕ_i^t und damit ist $(f_i, t) \in U_{i+1}$ (s. Definition von U_{i+1} in Schritt 2). Nach Definition von K_{i+1} (s. Schritt 2) faktorisiert f_i im folgenden exakten Dreieck über K_{i+1}:

   $$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[d, "f_i"] \arrow[dr, "f_{i+1}"] & \\ K_{i+1} \arrow[r, "v_{i+1}"] & X_i \arrow[r, "w_{i+1}"] & X_{i+1} \end{tikzcd}$$

   Damit folgt

   $$f_{i+1} = w_{i+1} \circ f_i = \underbrace{w_{i+1} \circ v_{i+1}}_{0} \circ g_i = 0$$

   und wegen $f = \mathrm{colim}\, f_i$ ist auch $f = \widetilde{w_{i+1}^t} \circ f_{i+1} = 0$, also ist ϕ^t injektiv.

6. Bisher wurde nur gezeigt, dass ϕ auf der Menge T der kompakten Erzeuger[2] ein Isomorphismus ist. Sei $\mathscr{T}'$ die volle Unterkategorie

   $$\mathscr{T}' := \left\{ t \in \mathscr{T} \mid \forall n \in \mathbb{Z} : \Sigma^n \phi^t : \mathrm{Hom}(\Sigma^n t, X) \cong H(\Sigma^n t) \right\}$$

   Offenbar enthält $\mathscr{T}'$ die kompakten Erzeuger T und ist trianguliert (die Abgeschlossenheit unter Kegeln kann man mit dem Fünferlemma zeigen). $\mathscr{T}'$ ist sogar

[2] Oder für den wohl erzeugten Fall: β-kompakten Erzeuger, vgl. Abschnitt 3.3.

lokalisierend, weil sowohl $\mathrm{Hom}(-,X)$ als auch H Koprodukte auf Produkte abbilden. Wegen $T \subset \mathscr{T}'$ gilt also auch $\langle T\rangle \subset \mathscr{T}'$.

Um zu zeigen, dass $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$ gilt, sei $Y \in \mathscr{T}$ irgendein Testobjekt. Der Funktor $H := \mathrm{Hom}(-,Y)$ ist aufgrund der obigen Ergebnisse auf T darstellbar, d.h. man konstruiert wie in Schritt 1-3 ein $X \in \langle T\rangle$ sodass gilt:

$$\phi^t : \mathrm{Hom}(t,X) \cong \mathrm{Hom}(t,Y)\ \forall t \in T$$

Die natürliche Transformation $\phi : \mathrm{Hom}(-,X) \to \mathrm{Hom}(-,Y)$, die ja auf ganz $\mathscr{T}$ definiert war, ist wegen Korollar 1.1.5 von einem Morphismus $X \xrightarrow{f} Y$ induziert. Sei $Z = C(f)$ der Kegel. Wendet man den kohomologischen Funktor $\mathrm{Hom}(t,-)$ auf das exakte Dreieck

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to \Sigma X$$

an, so folgt wegen der Exaktheit der resultierenden Sequenz abelscher Gruppen $\mathrm{Hom}(t,Z) = 0\ \forall t \in T$.

Andererseits wird $\mathscr{T}$ von T erzeugt, und daher folgt $Z = 0$ (vgl. Def. 1.4.4) und somit auch $X \cong Y$, weil $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ ein exaktes Dreieck war. Da nach Konstruktion (s. Schritt 1-3) $X \in \langle T\rangle$ war, ist auch $Y \in \langle T\rangle$. Das Testobjekt Y war aber beliebig, und somit folgt $\langle T\rangle = \mathscr{T}' = \mathscr{T}$.

Damit ist der Brownsche Darstellbarkeitssatz für kompakt erzeugte (und, bis auf Punkt 5, auch für wohl erzeugte) triangulierte Kategorien bewiesen. □

3.2.3 Korollar *Sei $\mathscr{T}$ eine kompakt erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5) und sei T eine erzeugende Menge. Dann gilt $\langle T\rangle = \mathscr{T}$.*

Beweis. Es wird nicht verlangt, dass das Erzeugendensystem T aus kompakten Objekten besteht. Es genügt für den Beweis, dass der Brownsche Darstellbarkeitssatz in $\mathscr{T}$ gilt. Daher kann eine analoge Schlussfolgerung auch in den beiden noch zu behandelnden Fällen von wohl erzeugten Kategorien (Korollar 3.3.15) und perfekt erzeugten Kategorien (Korollar 3.4.4) gezogen werden.

$\langle T\rangle$ ist lokalisierend und erfüllt daher das Axiom (TR5). Weil T diese Kategorie ebenfalls erzeugt, lässt sich Neemans Darstellbarkeitssatz anwenden. Ist $Y \in \mathscr{T}$ ein beliebiges Objekt, dann wird der Funktor $\mathrm{Hom}(-,Y)|_{\langle T\rangle}$ durch ein Objekt $X \in \langle T\rangle$ dargestellt. Damit folgt (analog zu Schritt 6 des obigen Beweises, hier mit der lokalisierenden Unterkategorie $\langle T\rangle$ anstelle von $\mathscr{T}'$) die Behauptung $\langle T\rangle = \mathscr{T}$. □

3.2.4 Bemerkung Die Kompaktheit der Erzeuger wurde nur an einer einzigen Stelle gebraucht, und zwar in Schritt 5: Bei einem kompakten Objekt c vertauscht der Homotopie-Kolimes mit dem Funktor $\mathrm{Hom}(c,-)$.
Tatsächlich kann man die Konstruktion ohne Weiteres bis zu Schritt 4 durchführen, ohne auf Hindernisse zu stoßen, wenn man eine beliebige Menge von Objekten T annimmt. Neemans Verallgemeinerung auf wohl erzeugte Kategorien [Ne2], die einige Jahre nach [Ne1] veröffentlicht wurde, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

3.3 Neemans Verallgemeinerung auf wohl erzeugte Kategorien

Wohl erzeugte triangulierte Kategorien sind eine Verallgemeinerung von kompakt erzeugten Kategorien (s. Abschnitt 3.1). Um die Definition einer wohl erzeugten Kategorie zu formulieren, benötigt man die Begriffe von *perfekten Klassen* und *kleinen Objekten* mit Bezug auf eine feste unendliche Kardinalzahl β.

Die folgenden Definitionen und Sätze sind in Kapitel 3 von [Ne2] zu finden.

3.3.1 DEFINITION Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie und T eine Klasse von Objekten in $\mathscr{T}$. Sei β eine unendliche Kardinalzahl.

1. Eine triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$ heißt β-lokalisierend, wenn sie dick und abgeschlossen unter β-Koprodukten (d.h. Koprodukten mit Indexmenge der Kardinalität $< \beta$) ist.[3]
2. Mit $\langle T\rangle^{\beta}$ wird die kleinste β-lokalisierende Unterkategorie von $\mathscr{T}$ bezeichnet, die T enthält. Diese Kategorie wird auch die β-lokalisierende Hülle von T genannt.

3.3.2 BEMERKUNG Wenn $\mathscr{T}$ das Axiom (TR5) erfüllt, dann ist eine unter β-Koprodukten abgeschlossene triangulierte Unterkategorie automatisch dick, denn Idempotente spalten wegen Satz 1.3.13. Wir benutzen in dieser Arbeit nur triangulierte Kategorien mit (TR5). Wann immer bewiesen werden soll, dass eine Unterkategorie β-lokalisierend ist, genügt es also zu zeigen, dass sie trianguliert und abgeschlossen unter β-Koprodukten ist.[4]

3.3.3 SATZ *[Ne2, Lemma 3.2.4, Proposition 3.2.5]*
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert und erfülle das Axiom (TR5). Sei β eine unendliche Kardinalzahl und T eine Menge von Objekten in $\mathscr{T}$. Dann sind die Kategorien $\overline{T}$ (s. Def. 1.4.1) und $\langle T\rangle^{\beta}$ essentiell klein.

3.3.4 BEMERKUNG

1. Zum Beweis konstruiert Neeman eine zu $\overline{T}$ bzw. $\langle T\rangle^{\beta}$ äquivalente kleine Kategorie mit Hilfe einer transfiniten Induktion. In jedem Schritt werden alle Kegel (bis auf Isomorphie) bzw. alle Kegel und Koprodukte (jeweils bis auf Isomorphie) hinzugefügt. Beim Erreichen einer Limes-Ordinalzahl wird einfach die Vereinigung aller bisher gebildeten Mengen genommen. Durch dieses Verfahren ist sichergestellt, dass die Objekte der konstruierten Kategorie eine Menge bilden.
2. Die lokalisierende Hülle $\langle T\rangle$ stimmt mit der Vereinigung $\bigcup_{\beta}\langle T\rangle^{\beta}$ überein.

[3] Eine dicke triangulierte Unterkategorie ist somit $\aleph_0$-lokalisierend, wenn sie abgeschlossen unter endlichen Koprodukten ist, und sie ist $\aleph_1$-lokalisierend, wenn sie abgeschlossen unter abzählbaren Koprodukten ist.

[4] Vgl. [Ne2, Remark 3.2.7].

3. $\langle T\rangle$ ist allerdings i.A. nicht mehr essentiell klein, weswegen man in manchen Situationen anstelle von $\langle T\rangle$ die zu einer kleinen Kategorie äquivalente Kategorie $\langle T\rangle^\beta$ betrachtet (wobei β eine genügend große Kardinalzahl ist).

3.3.5 Definition Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und sei $\beta \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl. Eine Klasse von Objekten S in $\mathscr{T}$ heißt β-perfekt, wenn gilt:

1. $0 \in S$
2. Sei Λ eine Indexmenge mit $\operatorname{card}(\Lambda) < \beta$, seien X_λ ($\lambda \in \Lambda$) Objekte in $\mathscr{T}$ und sei $k \in S$. Dann faktorisiert jede Abbildung $f : k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ als
$$k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$
mit $k_\lambda \in S \quad \forall \lambda \in \Lambda$.
3. Seien Λ und X_λ wie oben, seien $k, k_\lambda \in S \quad \forall\lambda \in \Lambda$ und sei die Komposition
$$k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$
Null. Dann faktorisiert jede Abbildung f_λ als
$$k_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} l_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X_\lambda$$
mit $l_\lambda \in S$, sodass bereits die folgende Komposition Null ist:
$$k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} k_\lambda \xrightarrow{\coprod_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda} \coprod_{\lambda\in\Lambda} l_\lambda$$

3.3.6 Satz (Existenz einer maximalen β-perfekten Klasse $\mathscr{S}_\beta$)
[Ne2, Corollary 3.3.10, 3.3.12, 3.3.13, 3.3.14]
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert und erfülle (TR5), sei $\beta \geq \aleph_0$ und sei $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ eine triangulierte Unterkategorie. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte maximale β-perfekte Klasse $\mathscr{S}_\beta \subset \mathscr{S}$ (als β-perfekte Klasse in $\mathscr{T}$!), und $\mathscr{S}_\beta$ ist die Klasse von Objekten einer triangulierten Unterkategorie, die ebenfalls mit $\mathscr{S}_\beta$ bezeichnet wird. Ist $\mathscr{S}$ dick oder α-lokalisierend (für beliebiges $\alpha \geq \aleph_0$), dann auch $\mathscr{S}_\beta$.

Ebenfalls benötigt wird die folgende Verallgemeinerung kompakter Objekte, die Neeman in [Ne2, Kapitel 4.1] einführt:

3.3.7 Definition Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und $\alpha \geq \aleph_0$.

1. Ein Objekt $k \in \mathscr{T}$ heißt α-klein, wenn gilt:

   Jede Abbildung $f : k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ faktorisiert über ein α-Koprodukt, d.h. es gibt ein $\Lambda' \subset \Lambda$ mit $\operatorname{card}(\Lambda') < \alpha$, sodass f faktorisiert als
$$k \to \coprod_{\lambda\in\Lambda'} X_\lambda \hookrightarrow \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

2. Die volle Unterkategorie aller α-kleinen Objekte wird mit $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ bezeichnet.

3.3.8 Bemerkung Die $\aleph_0$-kleinen Objekte sind genau die kompakten Objekte aus Definition 3.1.4.

3.3.9 Lemma *[Ne2, Lemma 4.1.4, 4.1.6, 4.1.5]*

- *In obiger Situation ist $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ eine dicke triangulierte Unterkategorie.*
- *Ist α regulär, dann ist $\mathscr{T}^{(\alpha)}$ sogar α-lokalisierend.*

Die folgende Definition, die aus [Ne2, Abschnitt 4.2] stammt, kombiniert diesen Begriff mit dem Begriff der perfekten Klassen:

3.3.10 Definition Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und $\alpha \geq \aleph_0$. Mit

$$\mathscr{T}^{\alpha} := \left(\mathscr{T}^{(\alpha)}\right)_{\alpha}$$

bezeichnet man die maximale α-perfekte Klasse innerhalb der Unterkategorie der α-kleinen Objekte. Die Objekte dieser Unterkategorie werden <u>α-kompakte Objekte</u> genannt.

3.3.11 Lemma *[Ne2, Lemma 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5]*
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und $\alpha \geq \aleph_0$.

1. *Sei S eine α-perfekte Klasse von α-kleinen Objekten (d.h. $S \subset \mathscr{T}^{\alpha}$), dann ist S auch β-perfekt für beliebige $\beta \geq \aleph_0$.*
2. $\alpha < \beta \;\Rightarrow\; \mathscr{T}^{\alpha} \subset \mathscr{T}^{\beta}$
3. *$\mathscr{T}^{\alpha}$ ist dick.*
4. *Ist α regulär, dann ist $\mathscr{T}^{\alpha}$ sogar α-lokalisierend.*

Jetzt sind alle Grundlagen für die Definition von wohl erzeugten triangulierten Kategorien gelegt. Die folgende Definition ist inhaltlich dieselbe wie bei Neeman, erfolgt jedoch hier auf einem direkteren Weg, vgl. [Ne2, Kapitel 8.1].

3.3.12 Definition Sei $\mathscr{T}$ trianguliert und erfülle (TR5) und sei $\beta \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl.

1. Sei T eine erzeugende Menge in $\mathscr{T}$ (s. Def. 1.4.4), o.B.d.A. gelte $T \cong \Sigma T$. Dann heißt T ein <u>β-perfektes Erzeugendensystem</u>, wenn $T \cup \{0\}$ eine β-perfekte Klasse (de facto Menge) wie in Definition 3.3.5 ist.
2. T heißt <u>β-kompaktes Erzeugendensystem</u>, wenn außerdem alle Objekte in T β-klein wie in Definition 3.3.7 sind.
3. $\mathscr{T}$ heißt <u>β-kompakt erzeugt</u>, wenn es ein solches Erzeugendensystem gibt.
4. $\mathscr{T}$ heißt <u>wohl erzeugt</u>, wenn es eine reguläre Kardinalzahl β gibt, sodass $\mathscr{T}$ β-kompakt erzeugt ist.

3.3.13 BEMERKUNG

1. Ein β-kompaktes Erzeugendensystem T besteht aus β-kompakten Objekten: Weil $(T \cup \{0\}) \subset \mathscr{T}^{(\beta)}$ eine β-perfekte Klasse ist, liegt T in der maximalen β-perfekten Klasse $\mathscr{T}^{\beta} \subset \mathscr{T}^{(\beta)}$.[5]

2. Sei $\alpha \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl. Aufgrund der Feststellung in Satz 3.3.3, dass eine α-lokalisierende Hülle einer Menge von Objekten essentiell klein ist, kann man die Menge T auch durch die Objekte einer zu $\langle T \rangle^{\alpha}$ äquivalenten kleinen Kategorie ersetzen. Diese Menge von Objekten ist dann wegen [Ne2, Theorem 3.3.9] immer noch ein β-perfektes Erzeugendensystem.[6] Wählt man $\alpha = \beta$, so sind die Objekte einer zu $\langle T \rangle^{\beta}$ äquivalenten kleinen Kategorie sogar ein β-kompaktes Erzeugendensystem.

3. Jede kompakt erzeugte triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ (Definition 3.1.4) ist wohl erzeugt, denn sie hat ein kompaktes ($= \aleph_0$-kompaktes) Erzeugendensystem T und $T \cup \{0\}$ ist eine $\aleph_0$-perfekte Klasse.[7]

3.3.14 BEMERKUNG (ZUM BEWEIS DES DARSTELLBARKEITSSATZES)
Um den Brownschen Darstellbarkeitssatz für wohl erzeugte triangulierte Kategorien [Ne2, Proposition 8.4.2] zu beweisen, zeigt Neeman zunächst in [Ne2, Theorem 8.3.3], dass er für triangulierte Kategorien mit (TR5) und einem $\aleph_1$-perfekten Erzeugendensystem gilt.

Dieser Beweis ist größtenteils identisch mit dem in Abschnitt 3.2 behandelten Beweis für kompakt erzeugte Kategorien: Die Schritte 1-4 werden in [Ne2, Lemma 8.2.3] durchgeführt, und [Ne2, Lemma 8.3.1] entspricht Schritt 6.

Die Schwierigkeit liegt im fünften Schritt, in dem die Injektivität von ϕ^t für die erzeugenden Objekte t zu beweisen ist. Da die Erzeuger i.A. nicht kompakt sind, ist der Homotopie-Kolimes nicht zwangsläufig mit $\mathrm{Hom}(t, -)$ verträglich. Es wird daher ein anderes (komplexeres) Argument benötigt.

Dazu wird die $\aleph_1$-lokalisierende Hülle $\mathscr{S} := \langle T \rangle^{\aleph_1}$ des Erzeugendensystems T benutzt. Darauf aufbauend wird die Kategorie $\mathcal{E}x(\mathscr{S}^{op}, \mathscr{A}b)$ der kontravarianten Funktoren von $\mathscr{S}$ nach $\mathscr{A}b$, die abzählbare Koprodukte auf Produkte abbilden, untersucht. Diese Funktorkategorie ist tatsächlich eine Kategorie (mit Hom-*Mengen*), weil $\mathscr{S}$ nach Satz 3.3.3 essentiell klein ist.
Mit Hilfe exakter Sequenzen in $\mathcal{E}x(\mathscr{S}^{op}, \mathscr{A}b)$ zeigt Neeman, dass

$$\mathrm{Hom}(-, X)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{\phi|_{\mathscr{S}}} H|_{\mathscr{S}}$$

ein Isomorphismus in der Funktorkategorie ist. Dieser Teil des Beweises wird hier nicht näher erläutert, da er von Krause in [Kr2] übernommen und z.T. vereinfacht worden ist, s. Abschnitt 3.4.
Der Übergang zu Schritt 6 (vgl. S. 27) ist durch $T \subset \mathscr{S}$ sichergestellt.

[5] Vgl. [Ne2, Remark 8.1.7].
[6] Vgl. [Ne2, Remark 8.1.3, 8.1.5].
[7] Genauer gesagt ist jede 0 enthaltende Klasse von Objekten $\aleph_0$-perfekt, s. [Ne2, Example 3.3.16].

Die obige Annahme, dass $\mathscr{T}$ ein $\aleph_1$-perfektes Erzeugendensystem hat, war de facto keine Einschränkung: Jede wohl erzeugte triangulierte Kategorien mit (TR5) ist auch $\aleph_1$-perfekt erzeugt, denn wegen Lemma 3.3.11 Punkt 1 ist ein α-kompaktes Erzeugendensystem ($\alpha \geq \aleph_0$ regulär) auch $\aleph_1$-perfekt.[8]

3.3.15 Korollar *Sei $\mathscr{T}$ eine wohl erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5) und sei T eine erzeugende Menge. Dann gilt $\langle T \rangle = \mathscr{T}$.*

Beweis. Siehe Korollar 3.2.3. □

Neeman bringt neben dem Darstellbarkeitssatz noch folgendes Resultat an:

3.3.16 Korollar *[Ne2, Proposition 8.4.2]*
Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit (TR5), die wohl erzeugt von einer Menge T ist. Dann gilt für alle $\beta \geq \aleph_0$:

1. *Die Kategorie $\mathscr{T}^\beta$ der β-kompakten Objekte ist gleich $\langle T \rangle^\beta$.*
2. *$\mathscr{T}^\beta$ ist essentiell klein.*
3. *$\mathscr{T} = \bigcup_\beta \mathscr{T}^\beta$*

Beweis. Die erste Aussage folgt aus [Ne2, Lemma 4.4.5], das Neeman auch zum Beweis von Thomasons Lokalisierungssatz [Ne2, Theorem 4.4.9] verwendet. Die zweite Behauptung folgt daraus direkt mit Satz 3.3.3. Die letzte Aussage folgt aus der Gleichungskette

$$\mathscr{T} = \langle T \rangle = \bigcup_\beta \langle T \rangle^\beta = \bigcup_\beta \mathscr{T}^\beta$$

Der erste Teil wurde bereits bewiesen, der mittlere Teil gilt nach Definition der lokalisierenden Hülle und der letzte Teil ist Aussage 1. □

[8] Vgl. [Ne2, Proposition 8.4.2.1].

3.4 Krauses Verallgemeinerung auf perfekt erzeugte Kategorien

In diesem Abschnitt geht es um den Darstellbarkeitssatz von Krause in [Kr2], der in perfekt erzeugten Kategorien gilt.

3.4.1 DEFINITION Eine triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$, die (TR5) erfüllt, wird perfekt erzeugt von einer Menge von Objekten T, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G1) T erzeugt $\mathscr{T}$, d.h. aus $\mathrm{Hom}(t, X) = 0\ \forall t \in T$ folgt $X = 0$.

(G2) Seien $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ $(i \in \mathbb{N})$ Abbildungen in $\mathscr{T}$, sodass die induzierten Abbildungen $\mathrm{Hom}(t, X_i) \xrightarrow{(f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, Y_i)$ für alle $t \in T$ und alle $i \in \mathbb{N}$ surjektiv sind. Dann ist auch die folgende induzierte Abbildung für alle $t \in T$ surjektiv:

$$\mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i) \xrightarrow{(\coprod_i f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i)$$

3.4.2 BEMERKUNG

1. Jede kompakt erzeugte Kategorie ist auch perfekt erzeugt (mit dem gleichen Erzeugendensystem): Für jedes kompakte Objekt $t \in T$ kommutiert $\mathrm{Hom}(t, -)$ mit Koprodukten, und daher gilt in obiger Situation:

$$\mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in\mathbb{N}} X_i) \cong \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(t, X_i) \overset{\coprod_i (f_i)_*}{\twoheadrightarrow} \coprod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(t, Y_i) \cong \mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in\mathbb{N}} Y_i)$$

2. In Abschnitt 3 von [Kr2] verwendet Krause ein anderes Axiom (G2'), das außerdem in [Kr1] und [Kr4] unter der Bezeichnung (PG2) vorkommt:

   (G2') Seien $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ $(i \in I,\ I$ beliebige Indexmenge) Abbildungen in $\mathscr{T}$, sodass die induzierten Abbildungen $\mathrm{Hom}(t, X_i) \xrightarrow{(f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, Y_i)$ für alle $t \in T$ und alle $i \in I$ surjektiv sind. Dann ist auch die folgende induzierte Abbildung für alle $t \in T$ surjektiv:

$$\mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in I} X_i) \xrightarrow{(\coprod_i f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in I} Y_i)$$

   Der Unterschied zu (G2) liegt darin, dass hier beliebige und nicht nur abzählbare Indexmengen erlaubt sind. Es ist offensichtlich, dass die Implikation (G2')⇒(G2) gilt. Krause spricht in beiden Fällen von perfekt erzeugten Kategorien. In dieser Arbeit sind unter perfekt erzeugten Kategorien die in Definition 3.4.1 beschriebenen Kategorien zu verstehen. Ist die andere Definition gemeint, so wird die Kategorie hier als (G2')-perfekt erzeugte Kategorie bezeichnet.
   Da Krauses Darstellbarkeitssatz für eine perfekt erzeugte Kategorie bewiesen wird, gilt er automatisch auch für eine (G2')-perfekt erzeugte Kategorie.
   Die (G2')-perfekt erzeugten Kategorien werden bei der Verbindung zwischen wohl erzeugten und perfekt erzeugten Kategorien eine Rolle spielen, s. Abschnitt 3.5.

3. In [Kr4, Abschnitt 5.1] verlangt Krause anstelle des obigen Axioms (G1), dass $\langle T\rangle = \mathscr{T}$ gilt. Wenn (G2') gilt, ist dies laut [Kr4, Remark 5.1.2] äquivalent zu folgender Bedingung: Aus $\mathrm{Hom}(\Sigma^n t, X) = 0\ \forall t \in T\ \forall n \in \mathbb{Z}$ folgt $X = 0$. Setzen wir (wie schon in vorigen Kapiteln) voraus, dass das Erzeugendensystem abgeschlossen unter Translationen ist, so ist dies äquivalent zu (G1).

   De facto ist sogar, wenn nur (G2) gilt, die Äquivalenz von (G1) und $\langle T\rangle = \mathscr{T}$ gegeben, s. Korollar 3.4.4. Diese Äquivalenz folgt in einer triangulierten Kategorie mit (TR5) und einer Menge von Erzeugern direkt aus dem Brownschen Darstellbarkeitssatz (falls dieser gilt!), vgl. Korollar 3.2.3.

3.4.3 THEOREM (KRAUSE 2002) ***[Kr2, Theorem A]***
Sei $\mathscr{T}$ eine von einer Menge von Objekten S perfekt erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5). Dann ist ein Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ genau dann darstellbar, wenn er kohomologisch ist und Koprodukte auf Produkte abbildet.

3.4.4 KOROLLAR *Sei $\mathscr{T}$ eine perfekt erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5) und sei S eine erzeugende Menge. Dann gilt $\langle S\rangle = \mathscr{T}$.*

Beweis. Siehe Korollar 3.2.3. □

Der Beweis von Krauses Theorem baut auf Neemans Beweisen in [Ne1] und [Ne2] auf, benutzt aber abweichend von [Ne2] die Theorie der kohärenten Funktoren, was den Beweis etwas vereinfacht. Krauses Beweis wird in den Teilen, die nicht mit dem bereits in Abschnitt 3.2 ausformulierten Beweis aus [Ne1] übereinstimmen, hier erläutert. Dazu müssen wir zunächst kohärente Funktoren definieren und ihre wichtigsten Eigenschaften angeben.

3.4.5 DEFINITION Sei $\mathscr{T}$ eine additive Kategorie. Ein Funktor $F : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ heißt kohärent, wenn es in der Funktorkategorie[9] $\mathrm{Fun}(\mathscr{T}^{op}, \mathscr{Ab}) = \mathscr{Ab}^{\mathscr{T}^{op}}$ eine exakte Sequenz (von Funktoren und natürlichen Transformationen) der folgenden Gestalt gibt:

$$\mathrm{Hom}(-, X) \to \mathrm{Hom}(-, Y) \to F \to 0$$

Eine solche Sequenz wird auch Präsentierung von F genannt.

3.4.6 BEMERKUNG

1. Die kohärenten Funktoren bilden eine volle Unterkategorie der abelschen Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathscr{T}^{op}, \mathscr{Ab})$, genannt $\widehat{\mathscr{T}}$. Jedoch ist $\widehat{\mathscr{T}}$ im Allgemeinen nur additiv und nicht unbedingt abelsch, weil zwar Kokerne, jedoch nicht unbedingt Kerne existieren. In dem hier interessanten Fall einer triangulierten Kategorie $\mathscr{T}$ ist $\widehat{\mathscr{T}}$ aber abelsch, s. Lemma 3.4.7.

[9] Diese Funktorkategorie ist keine Kategorie im eigentlichen Sinne, sondern eine Metakategorie, da die Homomorphismen zwischen zwei Objekten nicht notwendig eine Menge bilden. Das ist aber für die weitere Definition nicht relevant.

2. Kohärente Funktoren haben den Vorteil, dass sie mengentheoretische Probleme umgehen: Die natürlichen Transformationen von einem darstellbaren Funktor zu einem beliebigen Funktor bilden stets eine Menge, und daher bilden auch die natürlichen Transformationen zwischen zwei kohärenten Funktoren eine Menge. Das bedeutet, dass $\widehat{\mathscr{T}}$ tatsächlich kleine Hom-Mengen hat und damit eine Kategorie im Sinne der ersten Bemerkung in Abschnitt 1.1 ist, sodass die üblichen Konstruktionen dort möglich sind.

3. Ein darstellbarer Funktor $F \cong \mathrm{Hom}(-, Z)$ ist kohärent, denn

$$0 = \mathrm{Hom}(-, 0) \to \mathrm{Hom}(-, Z) \xrightarrow{1} \mathrm{Hom}(-, Z) \to 0$$

ist eine Präsentierung. Von daher ist es sinnvoll, das Merkmal Kohärenz zu untersuchen.

4. Der Yoneda-Funktor $\mathcal{Y} : \mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{T}}$ ist durch $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, X)$ definiert und wegen Korollar 1.1.5 volltreu.

3.4.7 Lemma *[Kr2, Lemma 1]*
Die Kategorie $\widehat{\mathscr{T}}$ der kohärenten Funktoren auf einer additiven Kategorie $\mathscr{T}$ hat folgende Eigenschaften:

1. *Die Kategorie $\widehat{\mathscr{T}}$ hat (wie in Bem. 3.4.6 Punkt 1 erwähnt) Kokerne. Hat $\mathscr{T}$ schwache Kerne (z.B. wenn $\mathscr{T}$ trianguliert ist), dann ist $\widehat{\mathscr{T}}$ sogar abelsch.*[10]

2. *Ist $\mathscr{T}$ abgeschlossen unter Koprodukten, dann auch $\widehat{\mathscr{T}}$, und der Yoneda-Funktor $\mathcal{Y} : \mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{T}}$ ist kompatibel mit allen Koprodukten, die in $\mathscr{T}$ existieren.*

3.4.8 Definition Sei $T \subset \mathscr{T}$ eine Klasse[11] von Objekten. Dann ist der additive Abschluss $\mathrm{Add}(T)$ die kleinste volle additive Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die T enthält und unter Koprodukten und direkten Summanden abgeschlossen ist.

3.4.9 Lemma *[Kr2, Lemma 2]*

Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5), $S \subset \mathscr{T}$ eine Menge von Objekten, $\mathscr{S} := \mathrm{Add}(S)$ und sei $I : \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ der Inklusionsfunktor. Dann ist $\widehat{\mathscr{T}}$ abelsch (s. Lemma 3.4.7 Punkt 1) und es gilt:

1. *$\mathscr{S}$ hat schwache Kerne und $\widehat{\mathscr{S}}$ ist daher abelsch.*

2. *Es gibt ein Paar von adjungierten Funktoren (I^*, I_*), die auf den Objekten von $\widehat{\mathscr{S}}$ bzw. $\widehat{\mathscr{T}}$ (d.h. kohärenten Funktoren) wie folgt definiert sind:*

$$I_* : \widehat{\mathscr{T}} \to \widehat{\mathscr{S}}, \quad F \mapsto F|_{\mathscr{S}}$$

$$I^* : \widehat{\mathscr{S}} \to \widehat{\mathscr{T}}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, X) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, X)$$

[10] $\widehat{\mathscr{T}}$ wird dann die Abelianisierung von $\mathscr{T}$ genannt, vgl. [Kr3, Abschnitt 4.2].
[11] In den Anwendungen wird T im Allgemeinen eine Menge sein.

Dabei wird der Funktor I^* von den darstellbaren Funktoren auf beliebige kohärente Funktoren so ausgeweitet, dass er rechtsexakt ist. Der Funktor I_* ist sogar exakt, da eine exakte Sequenz von Funktoren $\mathscr{T} \to \mathscr{Ab}$ auch als Sequenz von Funktoren $\mathscr{S} \to \mathscr{Ab}$ betrachtet exakt ist.

3. *Es gilt $I_* \circ I^* = \mathrm{Id}_{\widehat{\mathscr{S}}}$ und $\widehat{\mathscr{T}}/\ker(I_*) \cong \widehat{\mathscr{S}}$.*

4. *Der als die Verknüpfung $\mathscr{T} \xrightarrow{\mathcal{Y}} \widehat{\mathscr{T}} \xrightarrow{I_*} \widehat{\mathscr{S}}$ definierte Funktor*

$$\mathcal{Y}_{\mathscr{S}} : \mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{S}}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}(-, X)|_{\mathscr{S}}$$

   ist homologisch.

3.4.10 BEMERKUNG

- Um zu zeigen, dass $\mathscr{S}$ schwache Kerne hat, konstruiert man Approximationen, d.h. zu jedem Objekt $X \in \mathscr{T}$ ein Objekt $X' \in \mathscr{S}$ und eine Abbildung $X' \to X$: Sei dazu $X' := \coprod_{s \in S} \coprod_{f : s \to X} s$ und $X' \to X$ auf einem Faktor (s, f) definiert als f.[12] Dann faktorisiert jede Abbildung $s \to X$ mit $s \in S$ über X'. Ein schwacher Kern in $\mathscr{S}$ kann nun definiert werden als eine Approximation zu einem schwachen Kern in $\mathscr{T}$.

- Zum Beweis der anderen Aussagen in [Kr2] zieht Krause einige allgemeine Resultate über abelsche Kategorien aus [Gab] heran.

- Einen Teil der Aussagen hat Krause für den Spezialfall einer von einem Objekt perfekt erzeugten Kategorie auch in [Kr3, Abschnitte 4.1, 4.2] bewiesen.

- Auch in Neemans Buch über triangulierte Kategorien kommt die Kategorie $\widehat{\mathscr{T}}$ vor, allerdings nur für trianguliertes $\mathscr{T}$, und wird als Abelianisierung $A(\mathscr{T})$ bezeichnet (s. [Ne2, Defintion 5.1.3]). Krause hingegen benutzt die Kategorie der kohärenten Funktoren auch für (nicht zwangsläufig triangulierte!) Unterkategorien der Form $\mathrm{Add}(S)$.

- Der Funktor $\mathcal{Y}_{\mathscr{S}}$ heißt bei Krause H. Da H allerdings hier schon für einen allgemeinen Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$ (dessen Darstellbarkeit bewiesen werden soll) vergeben ist, wird hier die (auch intuitivere) Bezeichnung $\mathcal{Y}_{\mathscr{S}}$ benutzt.

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen diesen Funktorkategorien und dem zweiten Axiom aus der Definition einer perfekt erzeugten Kategorie.

3.4.11 LEMMA *[Kr2, Lemma 3]*
Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit (TR5), $S \subset \mathscr{T}$ eine Menge von Objekten und sei $\mathscr{S} := \mathrm{Add}(S)$. Dann sind äquivalent:

1. *Der homologische Funktor $\mathcal{Y}_{\mathscr{S}} : \mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{S}}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(-, X)|_{\mathscr{S}}$ ist kompatibel mit abzählbaren Koprodukten.*

[12] Das ist genau die Konstruktion von Schritt 1 in Neemans Beweis, Seite 24: hier ist lediglich $\mathrm{Hom}(-, X)$ anstelle von H eingesetzt worden!

2. *Die Menge S erfüllt das Axiom (G2): Seien $X_i \stackrel{f_i}{\to} Y_i$ ($i \in \mathbb{N}$) Abbildungen in $\mathscr{T}$, sodass*
$$\mathrm{Hom}(s, X_i) \stackrel{(f_i)_*}{\to} \mathrm{Hom}(s, Y_i) \quad \forall s \in S \; \forall i \in \mathbb{N}$$
surjektiv ist. Dann ist auch für alle $s \in S$ folgende Abbildung surjektiv:
$$\mathrm{Hom}(s, \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i) \stackrel{(\coprod_i f_i)_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}(s, \coprod_{i \in \mathbb{N}} Y_i)$$

Beweis. Wegen $\mathcal{Y}_{\mathscr{S}} = I_* \circ \mathcal{Y}$ und Lemma 3.4.7 Punkt 2 ist die erste Aussage äquivalent dazu, dass I_* mit abzählbaren Koprodukten vertauscht. Das ist wegen Lemma 3.4.9 Punkt 3 genau dann der Fall, wenn $\ker I_*$ abgeschlossen unter abzählbaren Koprodukten ist.

Sei also $F = \coprod_{i \in \mathbb{N}} F_i$ ein Koprodukt in $\widehat{\mathscr{T}}$, wobei jeder Funktor F_i eine Präsentierung
$$\mathrm{Hom}(-, X_i) \stackrel{(\phi_i)_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}(-, Y_i) \to F_i \to 0$$
hat. $(\phi_i)_*$ ist dabei wegen Korollar 1.1.5 induziert von einem $\phi_i : X_i \to Y_i$. Angenommen alle F_i sind im Kern von I_*, d.h. diese Funktoren verschwinden auf $\mathscr{S}$. Dann ist die Abbildung
$$(\phi_i^s)_* = \mathrm{Hom}(s, \phi_i) : \mathrm{Hom}(s, X_i) \to \mathrm{Hom}(s, Y_i)$$
für alle $s \in \mathscr{S}$ und $i \in \mathbb{N}$ surjektiv.

Es ist zu zeigen, dass in diesem Fall die Äquivalenz $F \in \ker I_* \Leftrightarrow$ (G2) gilt.

F liegt im Kern von I_* genau dann, wenn $F|_{\mathscr{S}} = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn die Abbildung
$$\mathrm{Hom}(s, \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i) \xrightarrow{\coprod_i (\phi_i)_*} \mathrm{Hom}(s, \coprod_{i \in \mathbb{N}} Y_i)$$
surjektiv für alle $s \in \mathscr{S}$ ist. Das gilt genau dann, wenn es für die Menge der additiven Erzeuger $s \in S$ gilt. Da die X_i und Y_i beliebig waren (F_i war ja ein beliebiger kohärenter Funktor), ist diese Formulierung äquivalent zu (G2). □

Damit kann nun Krauses Brownscher Darstellbarkeitssatz für perfekt erzeugte Kategorien bewiesen werden. Die Notation ist dabei zum großen Teil so gehalten wie in den Abschnitten zu Neemans Darstellbarkeitssätzen.

3.4.12 Beweis (von Theorem 3.4.3)

Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und perfekt erzeugt von einer Menge S von Objekten. Sei $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}b$ kohomologisch und bilde Koprodukte auf Produkte ab.
Zunächst werden Schritt 1 und 2 von Neemans Beweis für kompakt erzeugte Kategorien (Theorem 3.2) durchgeführt, wobei auch hier o.B.d.A. angenommen wird, dass $S \cong \Sigma S$ gilt.

Man erhält eine unendliche Folge der Form

$$X_0 \xrightarrow{w_1} X_1 \xrightarrow{w_2} X_2 \xrightarrow{w_3} \cdots$$

sowie für alle $i \geq 0$ ein Element $\alpha_i \in H(X_i)$ mit $H(w_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$. Dieses α_i entspricht nach dem Yoneda-Lemma einer natürlichen Transformation

$$\phi_i : \mathrm{Hom}(-, X_i) \to H$$

Diese ist auf der erzeugenden Menge S surjektiv.[13] Für $t \in \mathscr{T}$ liegt ein $f : t \to X_i$ genau dann im Kern von ϕ_i^t, wenn $H(f)(\alpha_i) = 0$.

Der Zusammenhang dieser aus Neemans Beweis wiederholten Konstruktion mit kohärenten Funktoren ist nun der folgende:
Die natürliche Transformation ϕ_i hat als Kern einen Funktor $K_i : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{Ab}$, der auf einem Objekt $t \in \mathscr{T}$ die folgende Wirkung hat:

$$K_i(t) = \{f : t \to X_i \mid H(f)(\alpha_i) = 0\} \subset \mathrm{Hom}(t, X_i)$$

Dann ist X_{i+1} als Kegel der Abbildung

$$T_i := \coprod_{s \in S} \coprod_{f \in K_i(s)} s \xrightarrow{v_i} X_i$$

definiert, wobei v_i auf dem Summanden mit Index (s, f) gleich f ist. Bei Neeman wird das Objekt T_i mit K_i bezeichnet, hier bezeichnet jedoch (wie in Krauses Notation) K_i den Funktor, der der Kern von ϕ_i ist.

Die Bedingung $H(w_{i+1})(\alpha_{i+1}) = \alpha_i$ ist wie in Neemans Beweis äquivalent dazu, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(-, X_i) \arrow[dl, "(w_{i+1})^*"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\
\mathrm{Hom}(-, X_{i+1}) \arrow[rr, "\phi_{i+1}"] & & H
\end{tikzcd}$$

Sei nun $\mathscr{S} := \mathrm{Add}(S)$.[14] Dann ist wegen Lemma 3.4.9 Punkt 1 die Kategorie $\widehat{\mathscr{S}}$ der kohärenten Funktoren auf $\mathscr{S}$ abelsch und man kann Kolimites bilden.

Das Bild von

$$\mathcal{Y}_{\mathscr{S}}(T_i) = \mathrm{Hom}(-, T_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-, v_i)|_{\mathscr{S}}} \mathrm{Hom}(-, X_i)|_{\mathscr{S}} = \mathcal{Y}_{\mathscr{S}}(X_i)$$

ist nach Konstruktion von v_i gleich $K_i|_{\mathscr{S}}$. Das ist aber nach Definition der Kern von $\mathrm{Hom}(-, X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{\phi_i|_{\mathscr{S}}} H|_{\mathscr{S}}$, und deswegen erhält man eine exakte Sequenz der Form

$$\mathrm{Hom}(-, T_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-, v_i)|_{\mathscr{S}}} \mathrm{Hom}(-, X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{\phi_i|_{\mathscr{S}}} H|_{\mathscr{S}} \to 0$$

[13] Vgl. Neemans Beweis auf S.25.
[14] Diese Kategorie ist i.A. nicht trianguliert, aber das wird in Krauses Beweis auch nicht benötigt.

Also ist $H|_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \to \mathscr{Ab}$ ein kohärenter Funktor.

Da $\phi_i|_{\mathscr{S}}$ demnach ein Morphismus in der abelschen Kategorie $\widehat{\mathscr{S}}$ ist, ist auch sein Kern $K_i|_{\mathscr{S}}$ in $\widehat{\mathscr{S}}$ enthalten. Es gibt daher für alle $i \geq 0$ das folgende kommutative Diagramm in $\widehat{\mathscr{S}}$ mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_i|_{\mathscr{S}} & \to & \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\phi_i|_{\mathscr{S}}} & H|_{\mathscr{S}} & \to & 0 \\ & & 0\downarrow & & \psi_{i+1}\downarrow & & 1\downarrow & & \\ 0 & \to & K_{i+1}|_{\mathscr{S}} & \to & \mathrm{Hom}(-,X_{i+1})|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\phi_{i+1}|_{\mathscr{S}}} & H|_{\mathscr{S}} & \to & 0 \end{array}$$

Weil $\psi_{i+1} := \mathrm{Hom}(-, w_{i+1})$ auf $K_i|_{\mathscr{S}}$ verschwindet, gibt es eine Abbildung ι_i, die in das obige Diagramm eingefügt werden kann:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_i|_{\mathscr{S}} & \to & \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\phi_i|_{\mathscr{S}}} & H|_{\mathscr{S}} & \to & 0 \\ & & 0\downarrow & & \psi_{i+1}\downarrow & \iota_i \swarrow & 1\downarrow & & \\ 0 & \to & K_{i+1}|_{\mathscr{S}} & \to & \mathrm{Hom}(-,X_{i+1})|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\phi_{i+1}|_{\mathscr{S}}} & H|_{\mathscr{S}} & \to & 0 \end{array}$$

Insbesondere gilt $\phi_{i+1}|_{\mathscr{S}} \circ \iota_i = 1_{H|_{\mathscr{S}}}$, d.h. die obigen exakten Sequenzen in $\widehat{\mathscr{S}}$ spalten alle, und es gibt ein kommutatives Diagramm der folgenden Form:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}(-,X_1)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\psi_2} & \mathrm{Hom}(-,X_2)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\psi_3} & \mathrm{Hom}(-,X_3)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\psi_4} & \cdots \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \cong\downarrow & & \\ H|_{\mathscr{S}} \coprod K_1|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{1 \coprod 0} & H|_{\mathscr{S}} \coprod K_2|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{1 \coprod 0} & H|_{\mathscr{S}} \coprod K_3|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{1 \coprod 0} & \cdots \end{array}$$

Darüber kann nun der Kolimes gebildet werden, weil $\widehat{\mathscr{S}}$ abelsch ist. Dieser Kolimes ist offenbar $H|_{\mathscr{S}}$, weil die untere Sequenz als direkte Summe einer H-Sequenz und einer K_i-Sequenz aufspaltet, und letztere den Kolimes Null hat. Nach Konstruktion des Kolimes über der Indexmenge $\mathbb{N}$ gibt es die exakte Sequenz in $\widehat{\mathscr{S}}$ (wobei $\mathrm{shift} := \coprod_i \psi_i$):

$$0 \to \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{(\phi_i|_{\mathscr{S}})} H|_{\mathscr{S}} \to 0$$

Nun wird wie in Schritt 3 bei Neemans Beweis (s. S. 26) der Homotopie-Kolimes $X := \mathrm{hocolim}\, X_i$ gebildet, und wie in Schritt 4 bei Neeman folgt auch, dass das analog konstruierte $\phi : \mathrm{Hom}(-,X) \to H$ auf dem Erzeugendensystem S surjektiv ist.

Dann wird der homologische Funktor

$$\mathcal{Y}_{\mathscr{S}} : \mathscr{T} \to \widehat{\mathscr{S}}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}(-,X)|_{\mathscr{S}}$$

auf das gerade konstruierte X angewandt.[15] Hier kommt der Fakt ins Spiel, dass dieser Funktor wegen Lemma 3.4.11 mit abzählbaren Koprodukten vertauscht. Nach Definition des Homotopie-Kolimes ist dann die resultierende Sequenz in $\widehat{\mathscr{S}}$ exakt:

[15] Vgl. Lemma 3.4.9 Punkt 4.

$$\coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} \to \mathrm{Hom}(-,X)|_{\mathscr{S}}$$
$$\xrightarrow{\gamma} \coprod_i \mathrm{Hom}(-,\Sigma X_i)|_{\mathscr{S}} \xrightarrow{1-\Sigma\,\mathrm{shift}} \coprod_i \mathrm{Hom}(-,\Sigma X_i)|_{\mathscr{S}}$$

Aufgrund der anfänglichen Annahme $\Sigma S \cong S$ ist $(\Sigma(1-\mathrm{shift})) = (1-\Sigma(\mathrm{shift}))$ genauso wie $(1-\mathrm{shift})$ injektiv und daher ist $\gamma = 0$. $\mathrm{Hom}(-,X)|_{\mathscr{S}}$ ist also der Kokern von $(1-\mathrm{shift})$. Die resultierende kurze exakte Sequenz passt in das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} & \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(-,X)|_{\mathscr{S}} & \to & 0 \\
 & & 1\downarrow & & 1\downarrow & & \phi|_{\mathscr{S}}\downarrow & & \\
0 & \to & \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{1-\mathrm{shift}} & \coprod_i \mathrm{Hom}(-,X_i)|_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{(\phi_i|_{\mathscr{S}})} & H|_{\mathscr{S}} & \to & 0
\end{array}$$

Daher ist $\phi|_{\mathscr{S}} : \mathrm{Hom}(-,X)|_{\mathscr{S}} \to H|_{\mathscr{S}}$ auch injektiv.[16]

ϕ ist also auf den Objekten der additiven Kategorie $\mathscr{S}$ ein Isomorphimus, insbesondere auf den Objekten $s \in S$. Weil S die Kategorie $\mathscr{T}$ erzeugt, ist ϕ auf ganz $\mathscr{T}$ ein Isomorphismus. Das Argument für diese Schlussfolgerung ist genau wie in Schritt 6 von Neemans Beweis auf S. 27. □

3.5 Zusammenhang zwischen Neemans und Krauses Arbeiten

Eine kompakt erzeugte Kategorie ist nach Definition auch wohl erzeugt. In Bemerkung 3.4.2 Punkt 1 wurde gezeigt, dass sie auch perfekt erzeugt ist. Es stellt sich die Frage, wie die Begriffe wohl erzeugt, perfekt erzeugt und (G2')-perfekt erzeugt[17] zusammenhängen. Diese Frage lässt sich mit der folgenden Kette von Inklusionen beantworten:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{kompakt}\\ \text{erzeugte}\\ \text{Kategorien}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{wohl}\\ \text{erzeugte}\\ \text{Kategorien}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{(G2')-perfekt}\\ \text{erzeugte}\\ \text{Kategorien}\end{array}\right\} \subset \left\{\begin{array}{c}\text{perfekt}\\ \text{erzeugte}\\ \text{Kategorien}\end{array}\right\}$$

Die erste und die letzte Inklusion wurden in Bemerkung 3.3.13 Punkt 3 bzw. Bemerkung 3.4.2 Punkt 2 bereits gezeigt. Die mittlere Inklusion wird von Krause im Anschluss an [Kr2, Korollar zu Theorem A] bereits erwähnt und wird hier auf direktem Wege bewiesen, s. Lemma 3.5.1.

[16] Die Surjektivität war ja schon bekannt, vgl. auch Schritt 4 bei Neeman, S. 26.
[17] Zur Definition s. Bemerkung 3.4.2 Punkt 3.

In [Kr1] beweist Krause ein Kriterium dafür, wann eine (G2')-perfekt erzeugte Kategorie wohl erzeugt ist, s. Satz 3.5.4. Dabei wird die obige Inklusion (auf eine etwas andere Art und Weise) ebenfalls bewiesen. Am Ende dieses Abschnitts werden die beiden Beweise kurz verglichen.

3.5.1 LEMMA
Sei $\mathscr{T}$ eine wohl erzeugte triangulierte Kategorie, die (TR5) erfüllt. Dann ist $\mathscr{T}$ (G2')-perfekt erzeugt. Damit erfüllt $\mathscr{T}$ auch das (schwächere) Axiom (G2), ist also perfekt erzeugt. Insbesondere ist Theorem 3.2.1 also ein Spezialfall von Theorem 3.4.3.

Beweis. Die letzten Feststellungen folgen direkt aus Definition 3.4.1 und Bemerkung 3.4.2 Punkt 2.

Sei $\alpha \geq \aleph_0$ so gewählt, dass die essentiell kleine[18] Kategorie $\mathscr{T}^\alpha$ die Kategorie $\mathscr{T}$ erzeugt, und sei T eine Menge von Repräsentanten der Isomorphieklassen von $\mathscr{T}^\alpha$.

Axiom (G1) gilt, denn T erzeugt $\mathscr{T}$.

Um die Gültigkeit von (G2') zu beweisen, seien $X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ beliebig viele Abbildungen in $\mathscr{T}$, sodass die folgenden induzierten Abbildungen surjektiv sind:

$$\mathrm{Hom}(t, X_i) \xrightarrow{(f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, Y_i) \quad \forall t \in T \; \forall i \in I$$

Jede Abbildung $t \to Y_i$ ($t \in T$) faktorisiert also über $f_i : X_i \to Y_i$. Um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in I} X_i) \xrightarrow{(\coprod_{i\in I} f_i)_*} \mathrm{Hom}(t, \coprod_{i\in I} Y_i)$$

surjektiv ist, muss gezeigt werden, dass (für $t \in T$) jede Abbildung $g : t \to \coprod_{i\in I} Y_i$ als

$$t \xrightarrow{\widetilde{g}} \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I} f_i} \coprod_{i\in I} Y_i$$

faktorisiert.

Weil t ein α-kleines Objekt ist, faktorisiert g über ein Koprodukt $\coprod_{i\in I'} Y_i$, wobei $I' \subset I$ eine Teilindexmenge mit $\mathrm{card}(I') < \alpha$ ist.

Nach Definition einer α-perfekten Klasse (s. Def. 3.3.5) faktorisiert die daraus resultierende Abbildung $t \to \coprod_{i\in I'} Y_i$ über

$$t \to \coprod_{i\in I'} t_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I'} \phi_i} \coprod_{i\in I'} Y_i$$

mit $t_i \in T$. Gesamthaft faktorisiert g also als

$$t \to \coprod_{i\in I'} t_i \xrightarrow{\coprod_{i\in I'} \phi_i} \coprod_{i\in I'} Y_i \hookrightarrow \coprod_{i\in I} Y_i$$

[18]Vgl. Korollar 3.3.16.

Jetzt können wir nach Voraussetzung jedes ϕ_i als $t_i \xrightarrow{\psi_i} X_i \xrightarrow{f_i} Y_i$ faktorisieren (für $i \in I'$). Zusammengesetzt ergibt sich das folgende kommutative Diagramm, wobei die Komposition der Abbildungen in der unteren Zeile das ursprüngliche g ist.

$$\begin{array}{ccccccc} t & \to & \coprod_{i\in I'} t_i & \xrightarrow{\coprod_{i\in I'}\psi_i} & \coprod_{i\in I'} X_i & \hookrightarrow & \coprod_{i\in I} X_i \\ || & & || & & \downarrow \coprod f_i & & \downarrow \coprod f_i \\ t & \to & \coprod_{i\in I'} t_i & \xrightarrow{\coprod_{i\in I'}\phi_i} & \coprod_{i\in I'} Y_i & \hookrightarrow & \coprod_{i\in I} Y_i \end{array}$$

In der oberen Zeile ergibt sich als Komposition die gewünschte Abbildung $\widetilde{g}$. □

Für den noch folgenden Teil dieses Abschnitts ist es wichtig zu wissen, dass Neeman in der Einleitung seines Buches eine andere Definition einer wohl erzeugten Kategorie angibt (s. [Ne2, Definition 1.15]).

3.5.2 Definition Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit (TR5) und $\beta \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl. $\mathscr{T}$ heißt β-kompakt erzeugt, wenn gilt:

i) $\mathscr{T}^\beta$ ist essentiell klein.

ii) $\left\langle \mathscr{T}^\beta \right\rangle = \mathscr{T}$

$\mathscr{T}$ heißt wohl erzeugt, wenn es ein β gibt, sodass $\mathscr{T}$ β-kompakt erzeugt ist.

3.5.3 Lemma *Beide Definitionen einer β-kompakt erzeugten Kategorie sind äquivalent: Eine β-kompakt erzeugte Kategorie im Sinne von Definition 3.3.12 (die im Folgenden in den Bedingungen a)-c) wiederholt wird) erfüllt die Bedingungen i) und ii). Eine β-kompakt erzeugte Kategorie im Sinne der obigen Definition enthält eine Menge T, sodass gilt:*

a) *T erzeugt $\mathscr{T}$ und $T \cong \Sigma T$.*

b) *$T \cup \{0\}$ ist eine β-perfekte Klasse.*

c) *T besteht aus β-kleinen Objekten, d.h. $T \subset \mathscr{T}^{(\beta)}$.*

Beweis. Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und $\beta \geq \aleph_0$ regulär.

⇒: Sei T eine Menge mit a)-c). Wegen Korollar 3.3.16 gilt $\langle T \rangle^\beta = \mathscr{T}^\beta$ und diese Kategorie ist essentiell klein, also gilt i).
Wegen Korollar 3.3.15 gilt $\langle T \rangle = \mathscr{T}$, und Bedingung ii) folgt daher aus

$$\left\langle \mathscr{T}^\beta \right\rangle = \left\langle \langle T \rangle^\beta \right\rangle \supset \langle T \rangle = \mathscr{T}$$

⇐: Es gelte i) und ii). Sei T die Menge von Objekten einer zu $\mathscr{T}^\beta$ äquivalenten kleinen Kategorie. Aus ii) folgt mit Lemma 1.4.5 Punkt 2, dass $\mathscr{T}$ von $\mathscr{T}^\beta$ erzeugt ist. Weil T eine äquivalente Unterkategorie ist, erzeugt T bereits $\mathscr{T}$. Weil $\mathscr{T}^\beta$ trianguliert ist, gilt $T \cong \Sigma T$, womit a) gezeigt ist.

Bedingung b) folgt daraus, dass die Inklusion $T \hookrightarrow \mathscr{T}^\beta$ eine Äquivalenz ist (die Menge T enthält die Null bereits, weil $\mathscr{T}^\beta$ trianguliert ist).
Bedingung c) gilt schließlich nach Definition von $\mathscr{T}^\beta \subset \mathscr{T}^{(\beta)}$.

□

Diese zweite Definition verwendet Krause in [Kr1] (worauf wir in Kürze hier noch eingehen) und es ist anzunehmen, dass er sie in [Kr2] auch gemeint hat. Der Beweis, dass wohl erzeugte Kategorien auch (G2')-perfekt erzeugt sind, ist daher in [Kr1, Theorem A] etwas anders als in Lemma 3.5.1. Dort gibt Krause außerdem auch ein Kriterium dafür an, wann eine (G2')-perfekt erzeugte Kategorie wohl erzeugt ist. Die Aussage ist, in die Begrifflichkeiten von [Kr2] und [Ne2] übersetzt, die folgende:

3.5.4 Satz *Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie mit (TR5) und sei $\alpha \geq \aleph_0$ regulär. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathscr{T}$ ist α-kompakt erzeugt.*
2. *$\mathscr{T}$ ist (G2')-perfekt erzeugt von einer Menge $T \subset \mathscr{T}^{(\alpha)}$, d.h. von einer Menge von α-kleinen Objekten.*

3.5.5 Bemerkung

1. Die wohl erzeugten Kategorien sind also genau diejenigen (G2')-perfekt erzeugten, die eine gewisse Kleinheitsbedingung erfüllen, wobei die Kardinalzahl α selbst nicht von Bedeutung ist. Der entscheidende Punkt ist, dass es bei Abbildungen aus einem erzeugenden Objekt in ein Koprodukt überhaupt eine obere Schranke für die Kardinalität der Indexmenge dieses Koprodukts gibt.

2. Zum Beweis:

   Die Richtung „(1)⇒(2)“ wurde bereits in Lemma 3.5.1 auf direktem Wege bewiesen. Krause verwendet, wie oben bereits erwähnt, Neemans alternative Definition einer α-kompakt erzeugten Kategorie aus der Einleitung seines Buches, s. Definition 3.5.2. Der Beweis in [Kr1] folgt der folgenden Strategie:

   Sei $\mathscr{T}$ α-kompakt erzeugt, d.h. Bedingungen i) und ii) aus Definition 3.5.2 gelten. Sei $T \subset \mathscr{T}^\alpha$ die Menge von Objekten einer äquivalenten kleinen Kategorie. T erzeugt $\mathscr{T}$, vgl. „⇐“ im Beweis von Lemma 3.5.3, daher gilt (G1).
   Nach [Kr1, Lemma 6] erfüllt $\mathscr{T}^\alpha$ das Axiom (G4):

   (G4) Für jede Abbildung $t \xrightarrow{\phi} \coprod_{i\in I} X_i$ mit $t \in \mathscr{T}^\alpha$ und $X_i \in \mathscr{T}$ (I beliebige Indexmenge) existieren Objekte $t_i \in \mathscr{T}^\alpha$, sodass ϕ faktorisiert als

   $$t \to \coprod_{i\in I} t_i \xrightarrow{\coprod_i \phi_i} \coprod_{i\in I} X_i$$

   Dieses Axiom entspricht der zweiten Bedingung aus Definition 3.3.5 (der Definition einer β-perfekten Klasse) mit dem Unterschied, dass es keine Kardinalitätsbeschränkung für die Koprodukte gibt. (G4) gilt in diesem Fall, weil nach Lemma 3.3.11 eine α-perfekte Klasse von α-kleinen Objekten auch β-perfekt für alle $\beta \geq \aleph_0$ ist.

Die äquivalente kleine Kategorie T erfüllt damit ebenfalls (G4), und nach [Kr1, Lemma 4] erfüllt T auch (G2'). Die Faktorisierung lässt sich dabei direkt aus Axiom (G4) folgern, analog zum Ende des Beweises von Lemma 3.5.1. In (G4) kommt zwar prinzipiell eine beliebige Indexmenge vor, aber weil die Objekte in $\mathscr{T}^\alpha$ α-klein sind, faktorisiert die im Beweis von (G2') konstruierte Abbildung stets über ein α-Koprodukt. Das Axiom (G4) ist also nur ein Zwischenschritt in der Faktorisierung im Beweis von Lemma 3.5.1, und die hier relevante Beweisrichtung in [Kr1, Lemma 6] und [Kr1, Lemma 4] entspricht unserem Beweis von Lemma 3.5.1.

Die Richtung „(2)$\Rightarrow$(1)“ ist komplizierter und nimmt den größten Teil von [Kr1] ein. Krause zeigt in [Kr1, Lemma 4], dass $\mathscr{T}^\alpha$ die maximale Klasse von α-kleinen Objekten ist, die (G4) erfüllt. Er definiert $\mathscr{T}^\alpha$ sogar ursprünglich auf diese Weise. Weiterhin zeigt er mit Hilfe einer Kategorie von Funktoren, die Koprodukte bestimmter Kardinalitäten auf Produkte abbilden, dass $\langle T\rangle^\alpha = \mathscr{T}^\alpha$ gilt. $\langle T\rangle^\alpha$ ist wegen Satz 3.3.3 und der darauf folgenden Bemerkung essentiell klein, somit auch $\mathscr{T}^\alpha$. Damit sind die Bedingungen i) und ii) aus Definition 3.5.2 erfüllt.

3.6 Beispiele

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele für Anwendungen der bisher behandelten Darstellbarkeitssätze zitiert und z.T. erläutert.

Die wichtigsten triangulierten Kategorien sind die stabile Homotopiekategorie SH sowie derivierte Kategorien. Beide tauchen auch in den folgenden Beispielen auf.

3.6.1 Beispiel (Die stabile Homotopiekategorie)
Sei $\mathscr{T} := SH$ die stabile Homotopiekategorie. SH ist eine kompakt erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5): Sie ist erzeugt von dem Sphärenspektrum $\mathbb{S}^0$ und seinen Suspensionen, d.h. von der Menge von kompakten Objekten

$$T := \left\{ \mathbb{S}^n = \Sigma^n \mathbb{S}^0 \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dass T die Kategorie erzeugt, folgt aus dem Satz von Whitehead. Die Kompaktheit von $\mathbb{S}^0$ ist darauf zurückzuführen, dass das Bild eines kompakten CW-Komplexes (insbesondere also einer n-Zelle) in einem Koprodukt (d.h. Wedge-Summe) immer nur endlich viele Summanden trifft. Darüber hinaus gibt es beliebige Koprodukte $\coprod_{i\in I} X_i = \vee_{i\in I} X_i$ von Spektren, d.h. das Axiom (TR5) gilt. Daher ist Neemans erster Darstellbarkeitssatz anwendbar.

Die Menge T ist ein $\aleph_1$-perfektes Erzeugendensystem für $\mathscr{T}$[19] und erfüllt wegen Bemerkung 3.2.4 $\langle T\rangle = \mathscr{T}$ und wegen Korollar 3.3.16 auch $\mathscr{T}^\alpha = \langle T\rangle^\alpha$. Letzteres bedeutet,

[19]Vgl. [Ne2, Lemma D.1.3].

dass die α-kompakten Objekte in SH genau diejenigen sind, die durch weniger als α Wedges sowie Translationen und Kegel aus dem Erzeugendensystem T entstehen.

Jeder CW-Komplex, der durch Zusammenkleben von weniger als α Zellen entsteht, hat als Suspensionsspektrum also ein Spektrum, das als Objekt der triangulierten Kategorie SH α-kompakt ist.[20]

3.6.2 Beispiel (Bousfield-Lokalisierungen von SH)
Sei $\mathscr{T}$ weiterhin die stabile Homotopiekategorie und sei $\wedge$ das Smash-Produkt. Die Kategorie der E-azyklischen Spektren ist definiert als die volle Unterkategorie

$$\mathscr{T}_E := \{x \in \mathscr{T} \mid x \wedge E = 0\} = \{x \in \mathscr{T} \mid E_*(x) = \pi_*(E \wedge x) = 0\}$$

Die zweite Notation zeigt, dass es sich um die azyklischen Objekte bzgl. der von E induzierten Homologietheorie handelt. Die nun folgende Idee der Lokalisierung ist auf Bousfields Arbeiten [Bo1] und [Bo2] zurückzuführen, in der er die Lokalisierung von topologischen Räumen bzw. Spektren „nach einer Homologietheorie“ behandelt hat. Neeman behandelt in [Ne2, Kapitel 9] eine allgemeinere Variante der Bousfield-Lokalisierung, die sich unter gewissen Voraussetzungen auf eine lokalisierende Unterkategorie einer triangulierten Kategorie anwenden lässt.

Die Kategorie $\mathscr{T}_E$ ist trianguliert und lokalisierend.[21] Es ist möglich, die Verdier-Lokalisierung $\mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ zu bilden. Der Lokalisierungsfunktor $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ lässt dabei die Objekte gleich und hat die Eigenschaft, dass er alle Morphismen invertierbar macht, die ein E-azyklisches Spektrum $x \in \mathscr{T}_E$ als Kegel haben.[22]

Ist $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ eine volle Unterkategorie einer triangulierten Kategorie, dann ist die Kategorie der $\mathscr{S}$-lokalen Objekte definiert als

$${}^{\perp}\mathscr{S} \ := \ \{x \in \mathscr{T} \mid \forall s \in \mathscr{S} : \ \mathrm{Hom}(s, x) = 0\}$$

Diese Kategorie ist eine dicke triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$.[23]

Wendet man diese Definition auf $\mathscr{T} = SH$ und $\mathscr{S} = \mathscr{T}_E$ an, so erhält man die Kategorie ${}^{\perp}\mathscr{T}_E$ der E-lokalen Spektren.

Weil $\mathscr{T}_E$ lokalisierend ist und in der kompakt erzeugten Kategorie $\mathscr{T}$ der Brownsche Darstellbarkeitssatz gilt, lässt sich die abstrakte Grothendieck-Verdier-Dualität [Ne2, Theorem 8.4.4] anwenden: Der Lokalisierungsfunktor F hat einen rechtsadjungierten Funktor $G : \mathscr{T}/\mathscr{T}_E \to \mathscr{T}$, der auch Bousfield-Lokalisierungsfunktor genannt wird.[24]

[20] Vgl. [Ne2, Remark D.1.5].
[21] [Ne2, Lemma D.1.9].
[22] Zum Thema Verdier-Lokalisierung vgl. [Ne2, Kapitel 2] und [Kr4, Abschnitte 2-4].
[23] [Ne2, Lemma 9.1.12].
[24] Vgl. [Ne2, Kapitel 9].

Ein wichtiges Resultat von Neeman ist, dass in diesem Fall die Komposition von Funktoren

$$^{\perp}\mathscr{T}_E \hookrightarrow \mathscr{T} \xrightarrow{F} \mathscr{T}/\mathscr{T}_E$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist, d.h. die Lokalisierung nach den E-azyklischen Objekten ist gleichzeitig die Unterkategorie der E-lokalen Objekte.[25]

Neeman beweist in [Ne2, Theorem D.1.12], dass sowohl in $\mathscr{T}_E$ als auch in $^{\perp}\mathscr{T}_E = \mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ der Darstellbarkeitssatz gilt, weil beide Kategorien wohl erzeugt sind.

Sei $\alpha > \aleph_0$ eine beliebige reguläre Kardinalzahl. Dann besitzt $\mathscr{T}_E$ ein Erzeugendensystem R, das äquivalent ist zur essentiell kleinen Kategorie $\mathscr{T}^\alpha \cap \mathscr{T}_E$. Außerdem gilt $\{\mathscr{T}_E\}^\beta = \langle R \rangle^\beta$, diese Kategorie ist essentiell klein und erzeugt $\mathscr{T}_E$. Daher ist $\mathscr{T}_E$ nach Lemma 3.5.3 wohl erzeugt.

Darüber hinaus ist auch $\mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ eine wohl erzeugte Kategorie. Neeman folgert dazu aus Thomasons Lokalisierungssatz [Ne2, Theorem 4.4.9], dass für alle $\beta \geq \alpha$ gilt:

$$\{\mathscr{T}/\mathscr{T}_E\}^\beta = \mathscr{T}^\beta / \{\mathscr{T}_E\}^\beta$$

Die letzte Kategorie ist der Quotient von zwei essentiell kleinen Kategorien (Verdier-Lokalisierung) und daher auch essentiell klein. Weiterhin beweist Neeman, dass diese Kategorie bereits $\mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ erzeugt, d.h. $\mathscr{T}/\mathscr{T}_E$ ist wohl erzeugt.

3.6.3 Beispiel (Derivierte Kategorien)

Ist $\mathscr{A}$ eine abelsche Kategorie, dann ist die (unbeschränkte) derivierte Kategorie definiert als $D(\mathscr{A}) := K(\mathscr{A})/\mathrm{Ac}(\mathscr{A})$, also als die Homotopiekategorie der Kettenkomplexe in $\mathscr{A}$ lokalisiert nach der Unterkategorie der azyklischen Komplexe. [26] Die Kategorien $D^+(\mathscr{A})$, $D^-(\mathscr{A})$ und $D^b(\mathscr{A})$ werden analog definiert, mit dem Unterschied, dass hier nur die Kettenkomplexe eine Rolle spielen, die nach unten bzw. nach oben bzw. in beide Richtungen beschränkt sind.

Sei $\mathscr{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Die unbeschränkte derivierte Kategorie $D(\mathscr{Ab})$ ist kompakt erzeugt von $\{\Sigma^n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und erfüllt (TR5). Daher lässt sich Neemans erster Darstellbarkeitssatz anwenden.
Allgemeiner gilt diese Aussage auch für die Modulkategorie $\mathrm{Mod}(R)$ über einem beliebigen kommutativen Ring R.

Im Gegensatz dazu erfüllen beschränkte derivierte Kategorien der Form $D^+(\mathscr{A})$, $D^-(\mathscr{A})$, $D^b(\mathscr{A})$ (wobei $\mathscr{A}$ abelsch ist) das Axiom (TR5) nicht: Ist X ein nicht azyklischer Komplex von Objekten aus $\mathscr{A}$, der im Grad 0 konzentriert ist, dann liegen die Translationen der Form $\Sigma^n X$ in allen drei beschränkten Kategorien $D^\bullet(\mathscr{A})$ ($\bullet \in \{+,-,b\}$), das Koprodukt $\coprod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^n X$ jedoch nicht. Daher lässt sich keiner der Darstellbarkeitssätze von Neeman und Krause anwenden.

[25] Allgemeiner Fall: [Ne2, Theorem 9.1.16], für Lokalisierungen von SH s. [Ne2, Remark D.1.13].

[26] Zur Verdier-Lokalisierung vgl. [Ne2, Kapitel 2] oder [Kel, Abschnitte 9, 10]. Zur Konstruktion der derivierten Kategorie einer abelschen (oder exakten) Kategorie vgl. [Kel, Abschnitt 11].

3.6.4 Beispiel (Derivierte Kategorien von Garben über Mannigfaltigkeiten)
Eine weitere wohl erzeugte Kategorie behandelt Neeman in [Ne3]:

Sei M eine nicht kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit von positiver Dimension, und sei $\mathscr{T} := D(\text{Sheaves}/M)$ die derivierte Kategorie der Kategorie der Garben abelscher Gruppen über M. Diese Kategorie ist wohl erzeugt, weil die Kategorie Sheaves/M eine Grothendieck-Kategorie ist, vgl. Bem. 4.7.6.

$\mathscr{T}$ ist aber nicht kompakt erzeugt. De facto ist das Nullobjekt sogar das einzige kompakte Objekt in $\mathscr{T}$, wie Neeman aus der Nicht-Kompaktheit von M folgert.

3.6.5 Beispiel (Nicht wohl erzeugte Kategorien)
Ein Beispiel für eine triangulierte Kategorie, die (G2')-perfekt erzeugt, aber nicht wohl erzeugt ist, ist die duale Kategorie $\mathscr{T}^{op}$ einer beliebigen kompakt erzeugten triangulierten Kategorie $\mathscr{T} \neq \{0\}$ mit (TR5).

In [Kr4, Abschnitt 5.3] zeigt Krause, dass das Duale einer kompakt erzeugten Kategorie (G2')-perfekt erzeugt ist. Dieser Beweis benutzt, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver Kogenerator in $\mathscr{Ab}$ ist.

Neeman zeigt in [Ne2, Appendix E.1] allerdings, dass das Duale einer kompakt erzeugten triangulierten Kategorie mit (TR5) niemals wohl erzeugt sein kann. Dazu wird ein Objekt $\mathbb{BC} \in \mathscr{T}^{op}$ konstruiert, das besonders „groß“ ist, d.h. nicht β-klein für beliebig große Kardinalzahlen β ist. Wäre $\mathscr{T}^{op}$ wohl erzeugt, dann würde wegen Korollar 3.3.16 auch $\mathscr{T}^{op} = \bigcup_\beta (\mathscr{T}^{op})^\beta$ gelten. Dann müsste $\mathbb{BC}$ aber in einer der Kategorien $(\mathscr{T}^{op})^\beta$ liegen, die aus β-kleinen Objekten bestehen. Also kann $\mathscr{T}^{op}$ nicht wohl erzeugt sein.

Das Objekt $\mathbb{BC} \in \mathscr{T}^{op}$ wird von Neeman Brown-Comenetz-Objekt genannt und existiert dann, wenn die in [Ne2, Kapitel 6] analysierte Funktorkategorie $\mathcal{E}x(\mathscr{S}^{op}, \mathscr{Ab})$ einen injektiven Kogenerator hat (wobei $\mathscr{T}$ α-kompakt erzeugt ist und $\mathscr{S} := \mathscr{T}^\alpha$, hier: $\alpha = \aleph_0$).[27] Für diesen Fall beweist Neeman auch einen Darstellbarkeitssatz für $\mathscr{T}^{op}$, d.h. über die Darstellbarkeit homologischer Funktoren auf $\mathscr{T}$, die Produkte erhalten, s. [Ne2, Theorem 8.6.1].

3.6.6 Bemerkung Eine offene Frage ist:
Gibt es perfekt erzeugte Kategorien, die nicht (G2')-perfekt erzeugt sind?

3.6.7 Beispiel (Kategorie ohne Erzeuger)
Abschließend ein Beispiel für eine triangulierte Kategorie mit (TR5), die die Voraussetzungen von keinem der in diesem Kapitel behandelten Darstellbarkeitssätze erfüllt: Die Homotopiekategorie von Kettenkomplexen abelscher Gruppen $K(\mathscr{Ab}) = K(\mathbb{Z})$ enthält keine erzeugende Menge von Objekten, wie Neeman in [Ne2, Appendix E.3] zeigt. Auch dieser Beweis benutzt Neemans Theorie über Funktorkategorien der Form $\mathcal{E}x(\mathscr{S}^{op}, \mathscr{Ab})$, siehe [Ne2, Kapitel 6].

[27] Vgl. [Ne2, Abschnitt 8.5].

Kapitel 4

Brownsche Darstellbarkeit in stark erzeugten Kategorien

In Kapitel 3 wurden kompakt erzeugte Kategorien und deren Verallgemeinerungen – wohl erzeugte Kategorien (Neeman) und perfekt erzeugte Kategorien (Krause) – behandelt. J. Franke hat in [Fra] einen Darstellbarkeitssatz für triangulierte Kategorien bewiesen, die einen „starken Erzeuger“ haben und in denen die Hom-Gruppen gewissen Kleinheitsbedingungen genügen.

Frankes Satz wird in Abschnitt 4.1 formuliert. Der Beweis zerfällt in mehrere Teile, die in den Abschnitten 4.2-4.5 behandelt werden. In Abschnitt 4.6 werden Zusammenhänge mit Neemans und Krauses Resultaten aufgezeigt und in Abschnitt 4.7 werden einige Beispiele angegeben.

4.1 Der Darstellbarkeitssatz von Franke

Sei $\mathscr{T}$ in diesem Abschnitt stets eine triangulierte Kategorie, die das Axiom (TR5) erfüllt (d.h. abgeschlossen unter Koprodukten ist).
Ist κ eine Kardinalzahl, dann bezeichnet κ^+ die nächstgrößere Kardinalzahl.

4.1.1 Definition Eine Menge von Objekten T in $\mathscr{T}$ erzeugt $\mathscr{T}$ stark, wenn es eine Kardinalzahl κ gibt, sodass gilt:
Sei $\langle T\rangle_{\coprod}^{\kappa}$ die kleinste triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die abgeschlossen unter κ^+-Koprodukten ist und beliebige Koprodukte von Objekten in T enthält. Dann ist $\langle T\rangle_{\coprod}^{\kappa}$ bereits die ganze Kategorie $\mathscr{T}$.

4.1.2 Bemerkung

1. Gibt es eine solche Kardinalzahl κ, dann gilt die obige Bedingung automatisch auch für alle größeren Kardinalzahlen $\kappa' > \kappa$.

2. Mit Neemans Begriff der κ^+-lokalisierenden Hülle (s. Def. 3.3.1) gilt:

$$\langle T \rangle_{\coprod}^{\kappa} \;=\; \left\langle \left\{ \coprod_{i \in I} t_i \mid I \text{ beliebig}, \, t_i \in T \right\} \right\rangle^{\kappa^+}$$

   Allerdings ist $\langle T \rangle_{\coprod}^{\kappa}$ (im Gegensatz zu $\langle T \rangle^{\kappa}$) i.A. nicht mehr essentiell klein, weil die Koprodukte von Elementen aus T über beliebige Indexmengen nicht unbedingt eine Menge bilden.

3. $\langle T \rangle_{\coprod}^{\kappa}$ erfüllt, mit den Bezeichnungen aus Definition 1.4.1 und Definition 3.3.1, die folgende Kette von Inklusionen:

$$T \subset \overline{T} \subset \langle T \rangle^{d} \subset \langle T \rangle^{\kappa} \subset \langle T \rangle^{\kappa^+} \subset \langle T \rangle_{\coprod}^{\kappa} \overset{(*)}{\subset} \langle T \rangle \subset \mathscr{T}$$

   Insbesondere gilt wegen $(*)$, dass für das starke Erzeugendensystem T in obiger Definition $\langle T \rangle = \mathscr{T}$ gilt und damit wegen Lemma 1.4.5 Punkt 2 die Kategorie $\mathscr{T}$ von T erzeugt wird.

   Umgekehrt kann man aber nicht direkt aus $\langle T \rangle = \mathscr{T}$ schließen, dass für irgendeine Kardinalzahl κ auch $\langle T \rangle_{\coprod}^{\kappa} = \mathscr{T}$ gilt, und daher ist kein einfacher Beweis dafür erkennbar, dass kompakt oder wohl erzeugte Kategorien auch stark erzeugt sind.

   Die Beziehung zu Neemans und Krauses Arbeiten wird in Abschnitt 4.6 noch genauer untersucht.

4.1.3 Definition Sei T eine Menge von Objekten in $\mathscr{T}$. Sei $\mathfrak{M}(T)$ die Klasse aller regulären Kardinalzahlen κ, die die folgende Bedingung erfüllen:
Es gibt eine essentiell kleine κ-lokalisierende triangulierte Unterkategorie $\mathscr{C}(\kappa) \neq \{0\}$ von $\mathscr{T}$, sodass gilt:

$$\forall t \in T \quad \forall X \in \mathscr{C}(\kappa): \; \operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa$$

4.1.4 Bemerkung Die Regularität der Kardinalzahl κ ist beim Beweis von Frankes Darstellbarkeitssatz notwendig, damit bestimmte Koprodukte innerhalb der κ-lokalisierenden Unterkategorie $\mathscr{C}(\kappa)$ bleiben (vgl. Bem. 1.2.12).

Mit diesen Definitionen kann jetzt der Satz von Franke formuliert werden:

4.1.5 Theorem (Franke 2001) ***[Fra, Theorem 2.4]***
Sei $\mathscr{T}$ eine triangulierte Kategorie, die (TR5) erfüllt und von einer Menge T stark erzeugt ist. Falls $\mathfrak{M}(T)$ eine echte Klasse ist (d.h. nicht durch eine Kardinalzahl nach oben beschränkt), dann erfüllt $\mathscr{T}$ den Brownschen Darstellbarkeitssatz: Jeder kohomologische Funktor $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}b$, der Koprodukte auf Produkte abbildet, ist darstellbar.

Der Beweis dieses Satzes ist in Abschnitt 2 von [Fra] zu finden und wird im Folgenden (zum Teil noch etwas genauer) erläutert. Darüber hinaus werden gegen Ende des

Beweises auch einige der verwendeten Resultate aus der Arbeit von A. Heller [Hel] mit eingebracht. Es wird zu sehen sein, dass durchaus Ähnlichkeiten zu Neemans Resultaten in den Abschnitten 3.2 und 3.3 bestehen. Jedoch ist die Herangehensweise eine völlig andere als die von Neeman (und Krause).

Sei im Rest des Kapitels $\mathscr{T}$ trianguliert, erfülle (TR5) und besitze ein starkes Erzeugendensystem T, sodass $\mathfrak{M}(T)$ eine echte Klasse ist. Sei $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}b$ ein kohomologischer Funktor, der alle Koprodukte auf Produkte abbildet.

4.2 Der Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$

Zum Beweis von Theorem 4.1.5 ist folgende Konstruktion erforderlich:

4.2.1 Definition Sei wie oben $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}b$ ein kohomologischer Funktor, der Koprodukte auf Produkte abbildet. Sei $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ eine triangulierte Unterkategorie. Wir definieren eine Kategorie $\mathscr{C}_H$ wie folgt: Ein Objekt von $\mathscr{C}_H$ ist ein Paar (B, f) mit $B \in \mathscr{C}$ und $f \in H(B)$.
Ein Morphismus $\beta : (B, f) \to (B', f')$ in $\mathscr{C}_H$ ist gegeben durch einen Morphismus $\beta : B \to B'$ in $\mathscr{T}$ (de facto in $\mathscr{C}$, weil $\mathscr{C}$ eine volle Unterkategorie ist), sodass $H(\beta)(f') = f$ gilt.

4.2.2 Bemerkung

1. Dass Elemente der abelschen Gruppe $H(B')$ durch die Wirkung eines kontravarianten Funktors H auf β nach $H(B)$ zurückgezogen werden, erinnert von der Konstruktion her an die Beweise der Darstellbarkeitssätze von Neeman und Krause sowie auch an das Yoneda-Lemma. Franke definiert hier allerdings eine Kategorie, die bei den anderen Autoren nicht auftaucht. Dafür kommt sein Beweis des Darstellbarkeitssatzes ohne die explizite Konstruktion des darstellenden Objekts als Homotopie-Kolimes wie bei Neeman und Krause aus.

2. In [Hel, Appendix A] verwendet A. Heller diese Kategorie für den Fall, dass H kovariant ist, er nennt sie $(* \downarrow H)$.

3. Man kann sich unter den Elementen von $H(B')$ im Prinzip Morphismen von B' in ein den Funktor H darstellendes Objekt Z vorstellen. Die Existenz eines solche Objekts Z zu beweisen ist das Ziel dieses Kapitels. Dann gilt $H \cong \mathrm{Hom}(-, Z)$, und ein Objekt in $\mathscr{C}_H$ ist dann dasselbe wie ein Morphismus von einem Objekt in $\mathscr{C}$ nach Z.

4. Während Neeman und Krause zuerst das darstellende Objekt Z konstruieren und dann zeigen, dass es tatsächlich H darstellt, wird im Folgenden eine Approximation $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ an den Funktor H durch einen Kolimes über *alle* Objekte der Kategorie $\mathscr{C}_H$ (bis auf Isomorphie) gebildet. Dazu muss $\mathscr{C}$ notwendigerweise eine essentiell kleine Kategorie sein.

Anschließend wird gezeigt, dass dieser Funktor für „genügend große" essentiell kleine Unterkategorien $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ natürlich äquivalent zu H ist.

Sei ab jetzt $\mathscr{C}$ eine essentiell kleine triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$. Dann ist auch $\mathscr{C}_H$ essentiell klein, wie direkt aus der Definition folgt. Sei $\widetilde{\mathscr{C}_H} \subset \mathscr{C}_H$ eine zu $\mathscr{C}_H$ äquivalente kleine Kategorie.

4.2.3 Definition Der Funktor $\widetilde{H_\mathscr{C}} : \mathscr{T} \to \mathscr{A}b$ ist auf einem Objekt $X \in \mathscr{T}$ wie folgt definiert:

$$\widetilde{H_\mathscr{C}}(X) := \operatorname*{colim}_{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \mathrm{Hom}_\mathscr{T}(X,B)$$

Auf den Morphismen in $\mathscr{T}$ ist die Wirkung des Funktors von den Hom-Funktoren und vom Kolimes induziert.

4.2.4 Bemerkung

1. Der Kolimes wird über *alle* Objekte und Morphismen in $\widetilde{\mathscr{C}_H}$ gebildet. Das geht, weil die Objekte von $\widetilde{\mathscr{C}_H}$ eine Menge bilden.
2. Die Definition ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl von $\widetilde{\mathscr{C}_H}$, d.h. von der Wahl der Repräsentanten der Isomorphieklassen von Objekten in $\mathscr{C}_H$.
3. Für festes $(B,f) \in \widetilde{\mathscr{C}_H}$ hat jede Abbildung $\alpha : X \to B$ ein Bild im Kolimes, d.h. kann als ein Element aus $\widetilde{H_\mathscr{C}}(X)$ interpretiert werden. Für verschiedene $f \in H(B)$ kann das im Kolimes resultierende Bild von $(\alpha : X \to B)$ beim Index (B,f) aber durchaus unterschiedlich sein.
4. Der Funktor $\widetilde{H_\mathscr{C}}$ ist eine Art Approximation an H, wie in der folgenden Definition erkennbar ist.

4.2.5 Definition Wir definieren eine natürliche Transformation $\phi_\mathscr{C} : \widetilde{H_\mathscr{C}} \to H$, die für ein Objekt $X \in \mathscr{T}$ die folgende Wirkung hat:

$$\begin{array}{rccc} \phi_\mathscr{C}^X : & \widetilde{H_\mathscr{C}}(X) = \mathrm{colim}_{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \mathrm{Hom}_\mathscr{T}(X,B) & \to & H(X) \\ & \text{Bild von } (\alpha : X \to B) \text{ im Kolimes beim Index } (B,f) & \mapsto & H(\alpha)(f) \end{array}$$

Als Nächstes werden wir, weiterhin [Fra] folgend, einige Eigenschaften des Funktors $\widetilde{H_\mathscr{C}}$ zeigen. Anschließend werden Kriterien angegeben, unter denen die oben definierte Abbildung $\phi_\mathscr{C}^X$ injektiv bzw. surjektiv ist.

4.3 κ-gerichtete Kategorien

Im Folgenden werden in der Notation Kardinalzahlen als Indexmengen benutzt, s. Bemerkung 1.2.10.

4.3.1 Definition Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl. Eine Kategorie $\mathscr{E}$ heißt κ-gerichtet (oder κ-kofiltrierend), wenn gilt:

1. Seien $(X_\xi)_{\xi \in \widetilde{\kappa}}$, $\widetilde{\kappa} < \kappa$, Objekte von $\mathscr{E}$, dann gibt es ein $Y \in \mathscr{E}$ sowie Morphismen $X_\xi \xrightarrow{\phi_\xi} Y \; \forall \xi \in \widetilde{\kappa}$.
2. Seien $(\alpha_\xi)_{\xi \in \widetilde{\kappa}}$, $\widetilde{\kappa} < \kappa$, Morphismen in $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(X, Y)$. Dann gibt es ein Objekt Z sowie einen Morphismus $Y \xrightarrow{\beta} Z$, sodass $\beta\alpha_\xi = \beta\alpha_\nu \; \forall \xi, \nu \in \widetilde{\kappa}$.

4.3.2 Bemerkung

1. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Definition einer gerichteten Kategorie (die in der Definition gerichteter Kolimites eine Rolle spielt). Die gerichteten Kategorien sind genau die $\aleph_0$-gerichteten Kategorien.
2. Sind $\lambda < \kappa$ reguläre Kardinalzahlen, dann ist jede κ-gerichtete Kategorie auch λ-gerichtet, insbesondere also auch gerichtet.
3. Hat $\mathscr{E}$ ein Finalobjekt, so ist $\mathscr{E}$ trivialerweise κ-gerichtet (für beliebige κ). Das Gegenteil gilt nicht; die Definition sichert nur die Existenz von Objekten, die etwas schwächere Eigenschaften als ein Finalobjekt haben.
4. Punkt 2 der obigen Definition ist eine Eigenschaft eines Koegalisators (auch Differenzkokern, engl. *coequalizer* genannt), jedoch wird hier nicht gefordert, dass das Objekt Z in irgendeiner Form universell ist.

4.3.3 Lemma *[Fra, Proposition 2.7]*
Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl und $\mathscr{E}$ eine kleine κ-gerichtete Kategorie. Dann ist der Funktor $\mathrm{colim}_{\mathscr{E}} : \mathscr{Ab}^{\mathscr{E}} \to \mathscr{Ab}$ exakt und vertauscht mit Produkten mit Indexmenge der Kardinalität $< \kappa$.

4.3.4 Bemerkung

- Die Kategorie $\mathscr{E}$ ist hier eine Indexmenge, d.h. der Kolimes wird (wie in unserem Fall bei der Definition von $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$) über alle Objekte und Morphismen genommen. Der Funktor $\mathrm{colim}_{\mathscr{E}}$ bildet somit einen Funktor $H : \mathscr{E} \to \mathscr{Ab}$ auf eine abelsche Gruppe ab, die der Kolimes aller abelscher Gruppen im Bild von H ist.
- Zum Beweis: Der Funktor $\mathrm{colim}_{\mathscr{E}}$ ist rechtsexakt, weil er links adjungiert zum konstanten Funktor ist, d.h. für $F : \mathscr{E} \to \mathscr{Ab}$ und $A \in \mathscr{Ab}$ gilt

  $$\mathrm{Hom}_{\mathscr{Ab}}(\operatorname*{colim}_{\mathscr{E}} F, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{Ab}^{\mathscr{E}}}(F, \mathrm{const}_A)$$

  Der Beweis der Linksexaktheit benutzt die in [Bass, Proposition I.8.2] bewiesene Darstellung eines gerichteten Kolimes in $\mathscr{Ab}$ als Quotient eines Koprodukts über

alle Objekte in $\mathscr{E}$.
Die zweite Aussage geht auf [GU, Satz 5.2] zurück und der Beweis ist eine Verallgemeinerung des Satzes, dass gerichtete Kolimites mit endlichen Limites vertauschen, vgl. [ML, Theorem IX.2.1].

4.3.5 Lemma *[Fra, Lemma 2.8]*
Seien $\mathscr{T}$ und H wie in der Voraussetzung von Theorem 4.1.5, sei $\kappa \geq \aleph_0$ regulär und sei $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ eine triangulierte Unterkategorie, die κ-lokalisierend ist. Dann ist die in Abschnitt 4.2 konstruierte Kategorie $\mathscr{C}_H = \{(B, f) \mid B \in \mathscr{C}, f \in H(B)\}$ κ-gerichtet.

Beweis. Die beiden Bedingungen aus Definition 4.3.1 müssen überprüft werden.

1. Seien $(B_\xi, f_\xi) \in \mathscr{C}_H$, wobei $\xi \in \widetilde{\kappa} < \kappa$. Wir benutzen an dieser Stelle, dass H Koprodukte auf Produkte abbildet. Das Koprodukt
$$(\coprod_{\xi<\widetilde{\kappa}} B_\xi, f), \qquad f := (f_\xi)_{\xi<\widetilde{\kappa}} \in \prod_{\xi<\widetilde{\kappa}} H(B_\xi) = H(\coprod_{\xi<\widetilde{\kappa}} B_\xi)$$
ist ein Objekt in $\mathscr{C}_H$, das die gewünschte Eigenschaft hat: Die Inklusionen der Summanden in das Koprodukt sind die erforderlichen Abbildungen; da sie durch F auf die Projektionen des Produkts abgebildet werden, verhalten sich auch die Elemente f_ξ wie gefordert.

2. Seien $\alpha_\xi : (B, f) \to (B', f')$, $\xi \in \widetilde{\kappa} < \kappa$, Morphismen in $\mathscr{C}_H$. Sei
$$\coprod_{\xi<\nu<\widetilde{\kappa}} B := \coprod_{\substack{(\xi,\nu) \in \widetilde{\kappa} \times \widetilde{\kappa} \\ \xi < \nu}} B$$
und sei ein Morphismus
$$\Delta_\alpha : \coprod_{\xi<\nu<\widetilde{\kappa}} B \to B'$$
auf einer Kopie von B mit Index (ξ, ν) durch $(\alpha_\xi - \alpha_\nu) : B \to B'$ definiert. Wegen der triangulierten Struktur von $\mathscr{C}$ kann man den Kegel $\overline{B}$ bilden, d.h. es gibt ein exaktes Dreieck
$$\coprod_{\xi<\nu<\widetilde{\kappa}} B \xrightarrow{\Delta_\alpha} B' \xrightarrow{\beta} \overline{B} \to \Sigma(\coprod_{\xi<\nu<\widetilde{\kappa}} B)$$
Da alle α_ξ Morphismen in $\mathscr{C}_H$ sind, d.h. $H(\alpha_\xi)(f') = f$ gilt, folgt $H(\Delta_\alpha)(f') = 0$. Weil H kohomologisch ist, ist die Sequenz
$$\prod_{\xi<\nu<\widetilde{\kappa}} H(B) \xleftarrow{H(\Delta_\alpha)} H(B') \xleftarrow{H(\beta)} H(\overline{B})$$
exakt. Es gibt daher ein $\overline{f} \in H(\overline{B})$ mit $H(\beta)(\overline{f}) = f'$. Also ist $\beta : (B', f') \to (\overline{B}, \overline{f})$ ein Morphismus in $\mathscr{C}_H$ und erfüllt die Bedingung $\beta\alpha_\xi = \beta\alpha_\nu \ \forall \xi, \nu < \widetilde{\kappa}$.

Also ist $\mathscr{C}_H$ κ-gerichtet. $\square$

4.3.6 Korollar *[Fra, Corollary 2.10]*
In der Situation des letzten Lemmas gilt: Der Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ ist kohomologisch und bildet κ-Koprodukte auf Produkte ab.

Beweis. Der Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ ordnet einem Objekt $X \in \mathscr{T}$ den Kolimes aller $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, B)$ über die Indexmenge $\left\{(B, f) \in \widetilde{\mathscr{C}_H}\right\}$ zu (s. Definition 4.2.3). Die Indexkategorie $\widetilde{\mathscr{C}_H}$ ist nach Konstruktion klein und äquivalent zu $\mathscr{C}_H$, und somit wegen Lemma 4.3.5 κ-gerichtet. Daher lässt sich Lemma 4.3.3 auf die Objekte der Form $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, -)$ in der Funktorkategorie $\mathscr{A}b^{\widetilde{\mathscr{C}_H}} = \mathrm{Fun}(\widetilde{\mathscr{C}_H}, \mathscr{A}b)$ anwenden.

1. $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ ist kohomologisch: Sei
$$X \to Y \to Z \to \Sigma X$$
ein exaktes Dreieck in $\mathscr{T}$. Weil $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, B)$ kohomologisch ist, ist die Sequenz
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y, B) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Z, B)$$
für alle $(B, f) \in \widetilde{\mathscr{C}_H}$ exakt. Anders gesagt, die Sequenz
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, -) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y, -) \leftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Z, -)$$
in der Funktorkategorie $\mathscr{A}b^{\widetilde{\mathscr{C}_H}}$ ist exakt. Wegen Lemma 4.3.3 ist dann auch die folgende Sequenz exakt:
$$\underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(X, B) \leftarrow \underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y, B) \leftarrow \underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Z, B)$$

2. $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ bildet κ-Koprodukte auf Produkte ab: Seien $X_\xi \in \mathscr{T}$, $\xi \in \widetilde{\kappa} < \kappa$, beliebige Objekte. Dann gilt
$$\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(\coprod_{\xi<\widetilde{\kappa}} X_\xi) = \underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(\coprod_{\xi<\widetilde{\kappa}} X_\xi, B) \cong \underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \prod_{\xi<\widetilde{\kappa}} \mathrm{Hom}(X_\xi, B)$$
$$\overset{\text{(Lemma 4.3.3)}}{\cong} \prod_{\xi<\widetilde{\kappa}} \underset{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}(X_\xi, B) = \prod_{\xi<\widetilde{\kappa}} \widetilde{H_{\mathscr{C}}}(X_\xi)$$

□

4.4 Unendliche reguläre Kardinalzahlen und $\phi_{\mathscr{C}}$

Seien $\mathscr{T}$ und H weiterhin wie am Ende von Abschnitt 4.1 beschrieben, und sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl.
Die natürliche Transformation $\phi_{\mathscr{C}} : \widetilde{H_{\mathscr{C}}} \to H$ (s. Definition 4.2.5) stellt eine Verbindung zwischen dem gegebenen Funktor H und der über die Kategorie $\mathscr{C}_H$ konstruierten Approximation $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}$ her. Es stellt sich die Frage, in welchen Fällen $\phi_{\mathscr{C}}$ ein natürlicher Isomorphismus ist. Dabei hilft das folgende Lemma:

4.4.1 Lemma *[Fra, Lemma 2.11]*
Sei $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ eine κ-lokalisierende triangulierte Unterkategorie. Sei T eine Menge von Objekten in $\mathscr{C}$ mit $\mathrm{card}(T) < \kappa$. Sei β eine Indexmenge und seien $t_\xi \in T$ $(\xi \in \beta)$ beliebige Objekte in T. Sei $B := \coprod_{\xi\in\beta} t_\xi$. Dann gilt:

a) *Wenn $\mathrm{card}(H(t)) < \kappa\ \forall t \in T$ gilt, dann ist $\phi^B_{\mathscr{C}} : \widetilde{H_{\mathscr{C}}}(B) \to H(B)$ surjektiv.*

b) *Wenn $\mathrm{card}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa\ \forall X \in \mathscr{C}\ \forall t \in T$ gilt, dann ist $\phi^B_{\mathscr{C}}$ injektiv.*

4.4.2 Bemerkung

1. Das Objekt $B := \coprod_{\xi\in\beta} t_\xi$ muss nicht in $\mathscr{C}$ liegen, da β eine beliebig große Indexmenge ist, während $\mathscr{C}$ nur κ-lokalisierend ist.
2. Die beiden Bedingungen für die Surjektivität bzw. Injektivität von $\phi^B_{\mathscr{C}}$ stehen direkt mit den Voraussetzungen von Theorem 4.1.5 in Zusammenhang: Bedingung a) lässt sich nach Definition 4.1.1 herstellen, weil T eine Menge ist. Man wählt einfach eine Kardinalzahl

$$\kappa > \max\left(\mathrm{card}(T), \sup\{\mathrm{card}(H(t))\}_{t\in T}\right)$$

Bedingung b) folgt dagegen direkt aus Definition 4.1.3, wenn man $\kappa > \mathrm{card}(T)$ und $\mathscr{C} := \mathscr{C}(\kappa)$ wählt (s. auch Beweis von Korollar 4.4.3).

Beweis. Zur Erinnerung: $\phi^B_{\mathscr{C}}$ schickt das Bild von $\alpha : B \to B'$ beim Index (B', f') in

$$\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(B) = \operatorname*{colim}_{(B',f')\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(B, B')$$

auf das Element $H(\alpha)(f') \in H(B)$.

a) Sei $f \in H(B)$ beliebig. Wir konstruieren im Folgenden ein Urbild in $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(B)$, d.h. eine Abbildung $\mu : B \to \widetilde{B}$ und ein Element $\widetilde{f} \in H(\widetilde{B})$ mit $H(\mu)(\widetilde{f}) = f$.

Für jedes $\xi \in \beta$ sei $f_\xi \in t_\xi$ die ξ-te Komponente von $f \in H(B) = \prod_{\xi\in\beta} H(t_\xi)$. Mit

$$\widetilde{B} := \coprod_{t\in T} \coprod_{\nu\in H(t)} t$$

erhalten wir ein Objekt, das die Wirkung des Funktors H auf dem Erzeugendensystems T zusammenfasst.[1] Weil $\mathrm{card}(T) < \kappa$ und $\mathrm{card}(H(t)) < \kappa\ \forall t \in T$ sowie wegen der Regularität von κ hat die Indexmenge dieses Koprodukts auch Kardinalität $< \kappa$. Weil $\mathscr{C}$ außerdem κ-lokalisierend ist, folgt $\widetilde{B} \in \mathscr{C}$.
Es gibt ein kanonisches Element

$$\widetilde{f} \in H(\widetilde{B}) = \prod_{t\in T} \prod_{\nu\in H(t)} H(t)$$

[1] Das ist dieselbe Konstruktion wie in Schritt 1 von Neemans Beweis, in dem die erste Approximation an das darstellende Objekt definiert wird, s. S. 24.

das auf dem Faktor $H(t)$ mit Index (t,ν) den Wert ν hat. Dann ist $(\widetilde{B},\widetilde{f})$ ein Objekt der Indexkategorie $\widetilde{\mathscr{C}_H}$.

Seien $i_\xi : t_\xi \to B$ für $\xi \in \beta$ sowie $j_{(t,\nu)} : t \to \widetilde{B}$ für $t \in T,\ \nu \in H(t)$ die Inklusionen in die jeweiligen Koprodukte. Weil H Koprodukte auf Produkte abbildet, werden diese Inklusionen unter H auf Projektionen der jeweiligen Produkte auf ihre Faktoren abgebildet (wie es auch schon in den anderen Beweisen der Fall war).
Betrachtet man nun die Inklusionen der Form $j_{(t_\xi,f_\xi)} : t_\xi \to \widetilde{B}$, wobei f_ξ der ξ-te Faktor von $f \in H(B) = \prod_{\xi\in\beta} H(t_\xi)$ ist, dann lässt sich eine Abbildung $\mu : B \to \widetilde{B}$ definieren, die auf dem ξ-ten Faktor t_ξ gleich der Inklusion $j_{(t_\xi,f_\xi)}$ ist, also $\mu \circ i_\xi = j_{(t_\xi,f_\xi)}$.[2]

Das oben definierte Element $\widetilde{f} \in H(\widetilde{B})$ hat nach Konstruktion für jeden Summanden $(t_\xi, f_\xi)_{\xi\in\beta}$ von B die Eigenschaft

$$H(i_\xi) \circ H(\mu)(\widetilde{f}) = H(\mu \circ i_\xi)(\widetilde{f}) = H(j_{(t_\xi,f_\xi)})(\widetilde{f}) = f_\xi$$

Das bedeutet aber $H(\mu)(\widetilde{f}) = \prod_{\xi\in\beta} f_\xi = f$. Also ist $\mu \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(B,\widetilde{B})$, als Element von $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(B) = \mathrm{colim}_{(B',f')\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(B,B')$ beim Index $(\widetilde{B},\widetilde{f})$ betrachtet, ein Urbild von $f \in H(B)$ unter $\phi^B_{\mathscr{C}}$, was zu zeigen war.

b) Im Beweis wird der folgende Fakt benutzt: Ist $(X,0) \in \mathscr{C}_H$, dann ist für alle $Y \in \mathscr{T}$ die zum Kolimes gehörige Strukturabbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y,X) \to \underset{(X',f')\in\widetilde{\mathscr{C}_H}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y,X') = \widetilde{H_{\mathscr{C}}}(Y)$$

beim Index $(X,0)$ bereits die Nullabbildung. Das liegt daran, dass $(X,0) \xrightarrow{0} (0,0)$ ein Morphismus in $\mathscr{C}_H$ ist und dann obige Strukturabbildung als

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y,X) \xrightarrow{0_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(Y,0) \to \widetilde{H_{\mathscr{C}}}(Y)$$

faktorisiert.
Sei nun $(X,f) \in \widetilde{\mathscr{C}_H}$ und $\mu : B = \coprod_{\xi\in\beta} t_\xi \to X$ mit $\phi^B_{\mathscr{C}}(\mu) = H(\mu)(f) = 0$. Wir müssen zeigen, dass μ im Kolimes $\widetilde{H}(B) = \mathrm{colim}_{(B',f')\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(B,B')$ Null wird.
Seien dazu $i_\xi : t_\xi \to B$ die Inklusionen der einzelnen Summanden und

$$\mu_\xi : t_\xi \overset{i_\xi}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{\mu} X$$

die ξ-te Komponente von μ. Offenbar gilt jeweils auch $H(\mu_\xi)(f) = 0 \in t_\xi$.
Sei

$$\widetilde{X} := \coprod_{t\in T} \coprod_{\substack{\nu:t\to X \text{ mit} \\ H(\nu)(f)=0}} t$$

[2]Die Abbildung μ ist wegen der universellen Eigenschaft des Koprodukts eindeutig bestimmt.

und $j_{(t,\nu)} : t \hookrightarrow \widetilde{X}$ die Inklusion beim Index (t, ν).[3]
Alle Objekte t in dieser Konstruktion sind in $\mathscr{C}$ und $\mathscr{C}$ ist κ-lokalisierend. Weiterhin hat die Indexmenge eine Kardinalität kleiner als κ, denn es gilt $\operatorname{card}(T) < \kappa$ und

$$\operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa \quad \forall t \in T, X \in \mathscr{C}$$

und κ ist regulär. Daher ist auch $\widetilde{X} \in \mathscr{C}$.

Sei $\Theta : \widetilde{X} = \coprod_{(t,\nu)} t \to X$ auf dem Summanden t mit Index (t, ν) definiert durch $\nu : t \to X$. Dann ist $H(\Theta)(f) = 0$ nach Konstruktion von $\widetilde{X}$. Daher ist $\Theta : (\widetilde{X}, 0) \to (X, f)$ ein Morphismus in $\mathscr{C}_H$.
In dieser Konstruktion wurden *alle* möglichen Abbildungen von beliebigen erzeugenden Objekten $t \in T$ nach X zusammengefügt, entlang denen das vorgegebene Element $f \in H(X)$ auf Null zurückgezogen wird. Insbesondere faktorisiert daher auch $\mu : B \to X$ über Θ wie folgt:
Sei $\chi : B = \coprod_{\xi \in \beta} t_\xi \to \widetilde{X}$ auf dem Summanden t_ξ mit Index $\xi \in \beta$ definiert durch die Inklusion $j_{(t_\xi, \mu_\xi)} : t_\xi \to \widetilde{X}$, wobei $\mu_\xi : t_\xi \to X$ die am Anfang des Beweises definierte ξ-te Komponente der ursprünglichen Abbildung $\mu : B \to X$ ist.
Dann ist μ die Komposition

$$B \xrightarrow{\chi} \widetilde{X} \xrightarrow{\Theta} X$$

weil für jede Komponente t_ξ von B gilt:

$$\Theta \circ \chi \circ i_\xi = \Theta \circ j_{(t_\xi, \mu_\xi)} = \mu_\xi = \mu \circ i_\xi$$

Weil $\Theta : (\widetilde{X}, 0) \to (X, f)$ ein Morphismus in $\mathscr{C}_H$ ist, haben $\mu \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(B, X)$ beim Index (X, f) und $\chi \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(B, \widetilde{X})$ beim Index $(\widetilde{X}, 0)$ dasselbe Bild in $\operatorname{colim}_{(B', f') \in \widetilde{\mathscr{C}_H}} \operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(B, B') = \widetilde{H_{\mathscr{C}}}(B)$. Dieses Bild ist aber wegen der anfänglichen Bemerkung Null. Damit ist $\phi_{\mathscr{C}}^B$ injektiv.

□

4.4.3 Korollar *[Fra, Corollary 2.12]*
Sei $\mathscr{T}$ wie in den Voraussetzungen von Theorem 4.1.5 stark erzeugt von einer Menge von Objekten T, erfülle (TR5), und sei $\mathfrak{M}(T)$ unbeschränkt. Sei $H : \mathscr{T}^{op} \to \mathscr{A}b$ ein kohomologischer Funktor, der Koprodukte in $\mathscr{T}$ auf Produkte in $\mathscr{A}b$ abbildet.
Sei außerdem $\kappa \in \mathfrak{M}(T)$ so groß gewählt, dass gilt:

1. $\operatorname{card}(H(\Sigma^i t)) < \kappa \quad \forall t \in T \forall i \in \mathbb{Z}$ [4]
2. *Die kleinste triangulierte Unterkategorie von $\mathscr{T}$, die abgeschlossen unter κ-Koprodukten ist und alle Koprodukte von Elementen aus T enthält, ist $\mathscr{T}$ selbst.*[5]
3. $\operatorname{card}(T) < \kappa$

[3]Vgl. hierzu die Konstruktion von K_i in Schritt 2 von Neemans Beweis, siehe S.25.
[4]Das ist möglich, weil $\mathbb{Z}$ und T Mengen sind, und somit die Kardinalitäten der abelschen Gruppen $H(\Sigma^i t)$ eine obere Schranke besitzen, nämlich $\operatorname{card}(\prod_{t \in T} \prod_{i \in \mathbb{Z}} H(\Sigma^i t))$.
[5]Das ist wegen Definition 4.1.1 und Bemerkung 4.1.2 möglich.

Dann gilt für jede triangulierte Unterkategorie $\mathscr{C}(\kappa) \subset \mathscr{T}$, die essentiell klein und κ-lokalisierend ist, sowie die Bedingung

$$\mathrm{card}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa \quad \forall t \in T \; \forall X \in \mathscr{C}(\kappa) \qquad (*)$$

erfüllt (vgl. Definition 4.1.3): Die natürliche Transformation

$$\phi_{\mathscr{C}(\kappa)} : \widetilde{H_{\mathscr{C}(\kappa)}} \to H$$

ist ein natürlicher Isomorphismus.

4.4.4 Bemerkung Die dritte Bedingung wurde hier (im Vergleich zu [Fra, Corollary 2.12]) eingefügt, da sich ansonsten Lemma 4.4.1 nicht anwenden lässt. Es ist klar, dass ein κ, welches außer den Bedingungen 1 und 2 auch Bedingung 3 erfüllt, existiert.

Beweis. O.B.d.A. kann wie in den Beweisen der anderen Darstellbarkeitssätze angenommen werden, dass $\Sigma T \cong T$ gilt. Die Kardinalitätsaussagen in den Voraussetzungen des Lemmas ändern sich dadurch nicht.

Sei $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ die volle Unterkategorie mit Objekten

$$\left\{ X \in \mathscr{T} \mid \phi^{\Sigma^i X}_{\mathscr{C}(\kappa)} : \widetilde{H_{\mathscr{C}(\kappa)}}(\Sigma^i X) \to H(\Sigma^i X) \text{ ist ein Isomorphismus für alle } i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Wegen Voraussetzung 2 genügt es zu zeigen:

1. $\mathscr{T}'$ enthält beliebige Koprodukte von Objekten in T.
2. $\mathscr{T}'$ ist trianguliert und κ-lokalisierend.

Dann folgt bereits $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$.[6]

Zum Beweis der beiden Behauptungen:

1. Sei $X = \coprod_{j \in J} t_j$ ein beliebiges Koprodukt mit $t_j \in T$. Um zu zeigen, dass $\phi^X_{\mathscr{C}(\kappa)}$ ein Isomorphismus ist, wird Lemma 4.4.1 benutzt. Die Voraussetzungen sind gegeben, da am Anfang des Beweises auch angenommen wurde, dass $\mathrm{card}(T) < \kappa$ gilt. Die Surjektivität von $\phi^X_{\mathscr{C}(\kappa)}$ folgt aus Voraussetzung 1 mittels Lemma 4.4.1a). Die Injektivität folgt aus der Bedingung $(*)$ an $\mathscr{C}(\kappa)$ mittels Lemma 4.4.1b). Wegen $\Sigma T \cong T$ und $\Sigma^i(\coprod_{j \in J} t_j) = \coprod_{j \in J} \Sigma^i t_j$ ist dann auch $\phi^{\Sigma^i X}_{\mathscr{C}(\kappa)}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Daher ist $X \in \mathscr{T}'$.
2. Die Unterkategorie $\mathscr{T}'$ ist trianguliert: Die Abgeschlossenheit unter Isomorphismen und Translationen folgt direkt aus der Definition und die Abgeschlossenheit unter Kegeln folgt mit dem Fünferlemma. Jetzt wird das Resultat aus dem letzten

[6] Vgl. hierzu den Anfang von Schritt 6 in Neemans Beweis. Der Unterschied ist hier nur, dass $\widetilde{H_{\mathscr{C}(\kappa)}}$ nur Koprodukte $< \kappa$ auf Produkte abbildet, während bei Neeman der darstellbare Funktor $\mathrm{Hom}(-, X)$ alle Koprodukte auf Produkte abbildet. Dafür müssen wir hier zusätzlich noch zeigen, dass beliebige Koprodukte der erzeugenden Objekte in $\mathscr{T}'$ enthalten sind.

Abschnitt über κ-gerichtete Kategorien benutzt: $\mathscr{T}'$ ist auch κ-lokalisierend, weil nach Korollar 4.3.6 der Funktor $\widetilde{H_{\mathscr{C}(\kappa)}}$ kohomologisch ist und Koprodukte $< \kappa$ auf Produkte abbildet, genau wie H es nach Voraussetzung tut.

□

4.5 Der Beweis des Darstellbarkeitssatzes

Für den Abschluss des Beweises benutzt Franke ein Resultat über Lösungsmengen des Darstellungsproblems aus [Hel]. Darüber zunächst ein kurzer Überblick.

4.5.1 Definition [Hel, S. 551-553]

1. Eine Kategorie $\mathscr{C}$ heißt P-Kategorie, wenn sie beliebige Produkte und schwache Pullbacks[7] besitzt. Sie heißt P^*-Kategorie, wenn sie beliebige Koprodukte und schwache Pushouts besitzt.
2. Sei $\mathscr{C}$ eine P-Kategorie und $F : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ ein Funktor. F heißt hyporepräsentierbar, wenn F Retrakt eines darstellbaren Funktors ist.
3. Sei $\mathscr{C}$ eine P-Kategorie und $F : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ ein Funktor. Eine Lösungsmenge für F ist eine Menge von Objekten $S \subset \mathscr{C}$ mit der folgenden Eigenschaft:
$$\forall X \in \mathscr{C}\ \forall x \in F(X) \quad \exists Y \in S,\ f : Y \to X,\ y \in F(Y) : \quad F(f)(y) = x$$
4. Ein Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ heißt halbexakt, wenn er mit Produkten und schwachen Pullbacks vertauscht.

4.5.2 Bemerkung

1. Da $\mathscr{T}$ das Axiom (TR5) erfüllt und schwache Pushouts[8] hat, ist $\mathscr{T}$ eine P^*-Kategorie. Daraus folgt, dass $\mathscr{T}^{op}$ eine P-Kategorie ist.
2. Alle (kovarianten) darstellbaren Funktoren $\mathscr{T} \to \mathscr{Ab}$ sind halbexakt.
3. Da es in Frankes Darstellbarkeitssatz um kontravariante Funktoren geht, muss man diese als kovariante Funktoren auf der Kategorie $\mathscr{T}^{op}$ betrachten. $\mathscr{T}^{op}$ besitzt beliebige Produkte und schwache Pullbacks, weil $\mathscr{T}$ beliebige Koprodukte und schwache Pushouts besitzt. Daher lauten die Definitionen für kontravariante Funktoren wie folgt:
   (a) Sei $\mathscr{C}$ eine P^*-Kategorie und $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{SETS}$ ein kontravarianter Funktor. Eine Lösungsmenge für F ist eine Menge von Objekten $S \subset \mathscr{C}$ mit der Eigenschaft:
$$\forall X \in \mathscr{C}\ \forall x \in F(X) \quad \exists Y \in S,\ f : X \to Y,\ y \in F(Y) : \quad F(f)(y) = x$$

[7] S. Definition 1.3.8.
[8] Homotopie-Pushouts, s. Definition 1.3.8 und Bemerkung 1.3.9.

(b) Ein Funktor $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{SETS}$ heißt halbexakt, wenn er Koprodukte (in $\mathscr{C}$) auf Produkte und schwache Pushouts auf schwache Pullbacks abbildet.

4. In diesem Sinne sind auch alle kontravarianten darstellbaren Funktoren halbexakt.

5. Jeder kohomologische Funktor, der Koprodukte auf Produkte abbildet, ist halbexakt, denn ein Homotopie-Pushout wird durch einen solchen Funktor auf ein schwaches Pullback abgebildet: Das Homotopie-Pushout-Quadrat wird auf ein Pullback-Quadrat abgebildet und das exakte Dreieck, das das Homotopie-Pushout definiert,[9] wird auf eine exakte Sequenz abelscher Gruppen abgebildet. Die Exaktheit dieser Sequenz impliziert die schwache Pullback-Eigenschaft.

4.5.3 Satz *[Hel, Theorem 1.4]*
Sei $\mathscr{C}$ eine P-Kategorie. Dann ist ein Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ genau dann hyporepräsentierbar, wenn er halbexakt ist und eine Lösungsmenge hat.

4.5.4 Bemerkung

- Der Beweis ist in [Hel, Appendix A] zu finden und geht auf ein Korollar zu Freyds Satz über adjungierte Funktoren zurück, vgl. [ML, Theorem V.6.2, Theorem V.6.3].
- Die kontravariante Version des Satzes lautet: Sei $\mathscr{C}$ eine P^*-Kategorie. Dann ist ein Funktor $F : \mathscr{C}^{op} \to \mathbf{SETS}$ genau dann hyporepräsentierbar, wenn er halbexakt (im Sinne von Bemerkung 4.5.2 Punkt 3b) ist und eine Lösungsmenge (im Sinne von Bemerkung 4.5.2 Punkt 3a) hat.

Diese Charakterisierung hyporepräsentierbarer Funktoren führt nun zusammen mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts zum abschließenden Beweis von Theorem 4.1.5:

4.5.5 Lemma *[Fra, Lemma 2.13]*
Sei $\mathscr{T}$ trianguliert mit (TR5) und sei $H : \mathscr{T} \to \mathscr{A}b$ ein kontravarianter kohomologischer Funktor, der Koprodukte auf Produkte abbildet. Sei $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$ eine essentiell kleine Unterkategorie, sodass die natürliche Transformation $\widetilde{H_{\mathscr{C}}} \overset{\phi_{\mathscr{C}}}{\to} H$ ein natürlicher Isomorphismus ist. Dann ist H darstellbar.

4.5.6 Bemerkung Daraus folgt bereits Theorem 4.1.5, denn eine solche kleine Unterkategorie ist nach Korollar 4.4.3 gegeben durch eine Kategorie der Form $\mathscr{C}(\kappa)$, wobei $\kappa \in \mathfrak{M}(T)$ hinreichend groß gewählt ist.

Beweis.

1. Aus der Annahme folgt, dass H eine Lösungmenge hat: Für alle $X \in \mathscr{T}$ ist die Abbildung
$$\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(X) = \operatorname*{colim}_{(B,f)\in\widetilde{\mathscr{C}_H}} \operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(X,B) \overset{\phi_{\mathscr{C}}^X}{\to} H(X)$$

[9] S. Definition 1.3.8 Punkt 2.

ein Isomorphismus. Diese Abbildung schickt das Bild einer Abbildung $\alpha : X \to B$ beim Index (B, f) auf $H(\alpha)(f) \in H(X)$. Insbesondere hat jedes $x \in H(X)$ ein Urbild in $\widetilde{H_{\mathscr{C}}}(X)$, d.h. es gibt ein $(B, f) \in \widetilde{\mathscr{C}_H}$ und ein $\alpha : B \to X$ mit $H(\alpha)(f) = x$. Die Objekte einer zu $\mathscr{C}$ äquivalenten kleinen Kategorie bilden also die gesuchte Lösungsmenge.

2. Wegen Bemerkung 4.5.2 Punkt 5 ist H halbexakt, und laut Satz 4.5.3 ist H hyporepräsentierbar. Es gibt also ein Objekt $Z \in \mathscr{T}$ und natürliche Transformationen $i : H \to \mathrm{Hom}(-, Z)$ und $r : \mathrm{Hom}(-, Z) \to H$ mit $ri = 1_H$, und ir ist ein idempotenter Morphismus des Objekts $\mathrm{Hom}(-, Z)$ in der Funktorkategorie. Aufgrund des Yoneda-Lemmas entspricht ir einem wiederum idempotenten Morphismus $\phi : Z \to Z$ in $\mathscr{T}$. Wegen Satz 1.3.13 spaltet ϕ, d.h. $Z = \ker \phi \coprod \mathrm{im}\, \phi$. Durch Anwenden des Yoneda-Lemmas erhält man damit $H \cong \mathrm{Hom}(-, \mathrm{im}\, \phi)$, also ist H darstellbar durch das Objekt $\mathrm{im}\, \phi$.

□

4.6 Zusammenhang mit wohl erzeugten Kategorien

In Bemerkung 4.1.2 Punkt 3 wurde bereits erwähnt, dass eine von einer Menge T stark erzeugte triangulierte Kategorie $\mathscr{T}$ mit (TR5) auch $\langle T \rangle = \mathscr{T}$ erfüllt und dass $\mathscr{T}$ von dieser Menge erzeugt wird (d.h. aus $\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(T, x) = 0$ folgt $x = 0$). Es stellt sich die Frage, wie der Begriff der stark erzeugten Kategorie[10] mit den in Kapitel 3 eingeführten Begriffen von kompakt erzeugten,[11] wohl erzeugten,[12] (G2')-perfekt erzeugten[13] und perfekt erzeugten[14] Kategorien zusammenhängt.

Leider lässt sich die Klasse der stark erzeugten Kategorien nicht auf offensichtliche Weise in die Kette von Inklusionen am Anfang von Abschnitt 3.5 einordnen.

Das hat folgenden Grund:

- Sei $\mathscr{T}$ eine von einer Menge T stark erzeugte Kategorie, sodass $\mathfrak{M}(T)$ unbeschränkt ist. Zwar wird dann $\mathscr{T}$ auch von T erzeugt, jedoch kann man nicht davon ausgehen, dass T nur kompakte bzw. (für eine reguläre Kardinalzahl β) β-kompakte Objekte enthält. Die Frage, ob $\mathscr{T}$ zumindest perfekt erzeugt ist, kann hier auch nicht allgemein beantwortet werden, da in Frankes Definition nicht die Rede von der Existenz bestimmter Faktorisierungen ist.

- Sei $\mathscr{T}$ kompakt oder wohl erzeugt von einer Menge von Objekten T. Es gilt $\langle T \rangle = \mathscr{T}$ nach Korollar 3.2.3 bzw. 3.3.15. Damit T die Kategorie auch stark erzeugt, müsste die Inklusion $(*)$ in Bemerkung 4.1.2 Punkt 3 eine Gleichheit sein,

[10] Def. 4.1.1
[11] Def. 3.1.4.
[12] Def. 3.3.12 Punkt 4.
[13] Bem. 3.4.2 Punkt 2.
[14] Def. 3.4.1.

d.h. $\langle T\rangle_{\coprod}^{\kappa} = \langle T\rangle$. Alternativ könnte man eine andere Menge T' suchen, sodass $\langle T'\rangle_{\coprod}^{\kappa} = \mathscr{T}$ gilt. Da unsere Kategorie (TR5) erfüllt, aber $\langle T\rangle_{\coprod}^{\kappa}$ a priori nur unter κ-Koprodukten abgeschlossen ist, kann diese Frage vermutlich im Allgemeinen nicht beantwortet werden.

Ist jedoch $\mathscr{T}$ wohl erzeugt von einer Menge T, so gilt automatisch, dass $\mathfrak{M}(T)$ unbeschränkt ist, wie es Franke in seinem Darstellbarkeitssatz fordert. Das folgt aus dem nächsten Satz, den Krause im Anschluss an seinen Darstellbarkeitssatz bewiesen hat.

Im Folgenden wird Gebrauch von der Arithmetik der Kardinalzahlen gemacht, s. Satz 1.2.9. Ist κ eine Kardinalzahl, dann bezeichnet κ^+ weiterhin die nächstgrößere Kardinalzahl.

4.6.1 Satz *[Kr2, Theorem C]*
Sei $\alpha \geq \aleph_0$ und $\mathscr{T}$ eine von einer Menge T von α-kleinen Objekten (G2')-perfekt erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5). Sei λ eine Kardinalzahl, die die Bedingung

$$\lambda \geq \sup\left\{\operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, \coprod_{i\in I} t_i)) \mid t, t_i \in T \text{ und } \operatorname{card}(I) < \alpha\right\} + \operatorname{card}(T)$$

erfüllt, und sei $\kappa := (\lambda^{\alpha})^+$. Dann gelten für die volle Unterkategorie

$$\mathscr{C}(\kappa) := \{X \in \mathscr{T} \mid \operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa \;\forall t \in T\}$$

die folgenden Aussagen:

1. *$\mathscr{C}(\kappa)$ ist trianguliert.*
2. *$\mathscr{C}(\kappa)$ ist κ-lokalisierend und enthält T. Außerdem ist $\mathscr{C}(\kappa)$ minimal mit dieser Eigenschaft, d.h. $\mathscr{C}(\kappa) = \langle T\rangle^{\kappa}$.*
3. *$\mathscr{C}(\kappa)$ ist essentiell klein und besteht aus κ-kleinen Objekten.*

Beweis. $\mathscr{T}$ ist eine (G2')-erzeugte Kategorie mit α-kleinen Erzeugern, und damit laut Satz 3.5.4 eine α-kompakt erzeugte Kategorie, d.h. wohl erzeugt. Beim Beweis von Punkt 3 wird zunächst der Beweis von Krause erläutert und dann als Alternative gezeigt, wie diese Eigenschaft aus Neemans Resultaten über wohl erzeugte Kategorien (Abschnitt 3.3) folgt.

Zunächst ist festzuhalten, dass die Kardinalzahl κ so gewählt ist, dass sie echt größer als jede der Kardinalzahlen α, λ, λ^{α}, $\operatorname{card}(T)$ sowie das Supremum der Kardinalitäten von Hom-Gruppen der Form $\operatorname{Hom}(t, \coprod_{i\in I} t_i)$ mit $t, t_i \in T$ und $\operatorname{card}(I) < \alpha$ ist. Außerdem ist κ als Nachfolger-Kardinalzahl regulär.

1. Der Beweis ist nicht schwer, wird aber hier kurz angegeben. Offenbar ist die Kategorie $\mathscr{C}(\kappa)$ abgeschlossen unter Isomorphismen. Um zu zeigen, dass sie trianguliert ist, muss noch die Abgeschlossenheit unter Kegeln und Translationen gezeigt

werden. Sei also $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ ein exaktes Dreieck in $\mathscr{C}(\kappa)$ mit $X, Z \in \mathscr{C}(\kappa)$. Weil der Funktor $\mathrm{Hom}(t, -)$ homologisch ist, gilt für jedes $t \in T$:

$$\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(t, Y)) \leq \mathrm{card}(\mathrm{Hom}(t, X)) \cdot \mathrm{card}(\mathrm{Hom}(t, Z)) < \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

Daher muss auch Y in $\mathscr{C}(\kappa)$ liegen. Wenn man (wie schon oft in den bisherigen Beweisen) annimmt, dass T unter Translationen abgeschlossen ist, so gilt mit obigen Bezeichnungen $\mathrm{Hom}(t, \Sigma X) \cong \mathrm{Hom}(\Sigma^{-1}t, X)$. Daher folgt aus $X \in \mathscr{C}(\kappa)$ bereits $\Sigma X \in \mathscr{C}(\kappa)$, und $\mathscr{C}(\kappa)$ ist trianguliert.

2. (a) Die Menge T liegt in $\mathscr{C}(\kappa)$:

$$\forall t, t' \in T: \quad \mathrm{card}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(t, t')) \leq \lambda \leq \lambda^\alpha < \kappa$$

Um zu zeigen, dass $\mathscr{C}(\kappa)$ κ-lokalisierend ist, seien $(X_i)_{i \in I}$ Objekte in $\mathscr{C}(\kappa)$, wobei $\mathrm{card}(I) < \kappa$, und sei $\bar{t} \in T$. Wir müssen $\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} X_i)) < \kappa$ zeigen.

i. Zunächst wird der Fall behandelt, dass alle X_i auch in T liegen.
Das Objekt $\bar{t}$ ist nach Voraussetzung α-klein, daher faktorisiert jede Abbildung $\bar{t} \to \coprod_{i \in I} X_i$ über ein α-Koprodukt (d.h. $\mathrm{card}(I') < \alpha$):

$$\bar{t} \to \coprod_{i \in I'} X_i \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X_i$$

Nach Definition der Kardinalzahl λ gilt dann $\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I'} X_i)) < \lambda$. Die Anzahl der Teilmengen $I' \subset I$ mit Kardinalität $< \alpha$ ist nach oben beschränkt durch die Anzahl von Abbildungen der Menge α in die Potenzmenge λ^α, also durch die Kardinalzahl $(\lambda^\alpha)^\alpha = \lambda^{\alpha \cdot \alpha} = \lambda^\alpha < \kappa$. Daher gilt

$$\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} X_i)) \leq \lambda^\alpha \cdot \lambda = \lambda^\alpha < \kappa$$

ii. Seien jetzt $X_i \in \mathscr{C}(\kappa)$ beliebige Objekte.
Sei für jedes $i \in I$ ein Objekt T_i definiert durch

$$T_i := \coprod_{t \in T} \coprod_{f: t \to X_i} t$$

sowie eine kanonische Abbildung $v_i : T_i \to X_i$, die auf dem Summanden mit Index (t, f) gleich f ist (vgl. die Definition von T_i und v_i im Beweis 3.4.12 von Krauses Darstellbarkeitssatz).
T_i ist ein Koprodukt von weniger als κ Objekten aus der erzeugenden Menge T, denn $\mathrm{card}(T) < \kappa$ (nach Definition), $\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(t, X_i)) < \kappa$ (wegen $X_i \in \mathscr{C}(\kappa)$) und κ ist regulär.
Jede Abbildung $\bar{t} \to X_i$ faktorisiert nach Konstruktion über T_i, d.h. für

alle $i \in I$ ist die Abbildung $\mathrm{Hom}(\bar{t}, T_i) \to \mathrm{Hom}(\bar{t}, X_i)$ surjektiv. Wegen (G2') ist dann auch

$$\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} T_i) \to \mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} X_i)$$

surjektiv. Es folgt

$$\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} X_i)) \leq \mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\bar{t}, \coprod_{i \in I} T_i)) < \kappa$$

wegen Punkt i., also $\coprod_{i \in I} X_i \in \mathscr{C}(\kappa)$.

Damit enthält $\mathscr{C}(\kappa)$ die kleinste κ-lokalisierende und T enthaltende Kategorie, d.h. $\langle T \rangle^\kappa \subset \mathscr{C}(\kappa)$.

(b) Es bleibt zu zeigen, dass umgekehrt auch $\mathscr{C}(\kappa) \subset \langle T \rangle^\kappa$ gilt. An dieser Stelle verweist Krause auf den Beweis seines Darstellbarkeitssatzes.[15] Die genaue Konstruktion ist die folgende: Sei $Y \in \mathscr{C}(\kappa)$. Wir betrachten den Funktor

$$H := \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(-, Y) : \mathscr{T} \to \mathscr{Ab}$$

Zum Beweis der Darstellbarkeit eines solchen Funktors wurde in Beweis 3.4.12 eine Folge der Form

$$X_0 \xrightarrow{w_1} X_1 \xrightarrow{w_2} X_2 \xrightarrow{w_3} \cdots$$

konstruiert und das H darstellende Objekt war $X := \mathrm{hocolim}\, X_i$. Weil H aber auch von Y dargestellt wird, ergibt sich $Y \cong X$. Wir zeigen, dass alle X_i in $\langle T \rangle^\kappa$ liegen, und aufgrund der Konstruktion des Homotopie-Kolimes ist auch $X \in \langle T \rangle^\kappa$. Dazu gehen wir induktiv vor:

- $X_0 \in \langle T \rangle^\kappa$:
  In der Definition
  $$X_0 := \coprod_{t \in T} \coprod_{\alpha \in \mathrm{Hom}(t, Y)} t$$
  hat die Indexmenge Kardinalität kleiner als κ, denn es gilt $\mathrm{card}(T) < \kappa$, $\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(t, Y)) < \kappa$ (wegen $Y \in \mathscr{C}(\kappa)$) und κ ist regulär.

- $T_i \in \langle T \rangle^\kappa$ für alle $i \geq 0$:
  Es war nach Definition
  $$T_i := \coprod_{t \in T} \coprod_{\substack{f \in \mathrm{Hom}(t, X_i) \\ H(f)(\alpha_i) = 0}} t$$
  und X_i liegt nach Induktion in $\langle T \rangle^\kappa \subset \mathscr{C}(\kappa)$. Indem man die Anzahl der möglichen Abbildungen $f : t \to X_i$ wie in Punkt 2(a) abschätzt, ergibt sich auch hier, dass das Koprodukt eine Indexmenge der Kardinalität kleiner als κ hat.

[15] [Kr2, Theorem A], hier: Satz 3.4.3 und Beweis 3.4.12.

- $X_{i+1} \in \langle T \rangle^\kappa$ für alle $i \geq 0$:
  X_{i+1} ist als der Kegel von $v_i : T_i \to X_i$ definiert. Beide Objekte liegen nach Induktion in der triangulierten Unterkategorie $\langle T \rangle^\kappa$ und damit auch X_{i+1}.

  Wie schon anfangs erwähnt, folgt $Y \cong X = \operatorname{hocolim} X_i \in \langle T \rangle^\kappa$ und damit auch $\mathscr{C}(\kappa) = \langle T \rangle^\kappa$.

3. Jedes Objekt in $\mathscr{C}(\kappa)$ kann, wie gerade gezeigt wurde, in abzählbar vielen Schritten (κ-Koprodukte sowie Kegel) aus der Menge T konstruiert werden, daher ist $\mathscr{T}(\kappa)$ essentiell klein. Weil die Kategorie der κ-kleinen Objekte $\mathscr{T}^{(\kappa)}$ lokalisierend ist und T enthält (die Objekte in T sind ja sogar α-klein, $\alpha < \kappa$), folgt $\mathscr{C}(\kappa) = \langle T \rangle^\kappa \subset \mathscr{T}^{(\kappa)}$.

   Dieser Punkt folgt alternativ direkt aus Neemans Resultaten, denn die κ-lokalisierende Hülle $\langle T \rangle^\kappa$ einer Menge von Objekten ist nach Lemma 3.3.3 immer essentiell klein. Weiterhin gilt wegen Korollar 3.3.16 auch $\langle T \rangle^\kappa = \mathscr{T}^\kappa \subset \mathscr{T}^{(\kappa)}$.

□

4.6.2 KOROLLAR *Sei $\mathscr{T}$ eine von einer Menge $T \subset \mathscr{T}$ wohl erzeugte triangulierte Kategorie mit (TR5). Dann ist auch die Klasse $\mathfrak{M}(T)$ unbeschränkt.*

Ist T außerdem ein starkes Erzeugendensystem für $\mathscr{T}$, dann lässt sich also die Brownsche Darstellbarkeit sowohl nach Franke als auch nach Neeman folgern.

Beweis. Sei $\mathscr{T}$ α-kompakt erzeugt und erfülle λ die Bedingung aus Satz 4.6.1. Es gibt beliebig große solche λ, und für die jeweilige Kardinalzahl $\kappa := (\lambda^\alpha)^+$ erfüllt die essentiell kleine Kategorie $\mathscr{C}(\kappa) = \langle T \rangle^\kappa = \mathscr{T}^\kappa$ die an $\kappa \in \mathfrak{M}(T)$ gestellte Bedingung:

$$\forall t \in T \quad \forall X \in \mathscr{C}(\kappa) : \ \operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{T}}(t, X)) < \kappa$$

□

4.7 Beispiele

Die nächsten beiden Definitionen folgen [KS].

4.7.1 DEFINITION Ein <u>Generator</u> in einer Kategorie $\mathscr{C}$ ist ein Objekt $G \in \mathscr{C}$, sodass der Funktor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G, -) : \mathscr{C} \to \mathbf{SETS}$ die folgende Bedingung erfüllt:
Falls $X \xrightarrow{f} Y$ ein Morphismus in $\mathscr{C}$ ist, sodass

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G, X) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G, Y)$$

ein Isomorphismus ist, dann ist f bereits ein Isomorphismus.

4.7.2 Bemerkung Äquivalent dazu ist: Der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G,-)$ ist treu, d.h. für jeden nicht verschwindenden Homomorphismus $f : X \to Y$ existiert ein $g : G \to X$ mit $fg \neq 0$.

4.7.3 Definition Eine Grothendieck-Kategorie $\mathscr{A}$ ist eine unter Kolimites abgeschlossene abelsche Kategorie mit Generator, in der filtrierte Kolimites exakt sind.

4.7.4 Beispiel

- Ist R ein kommutativer Ring, dann ist $\mathrm{Mod}(R)$ eine Grothendieck-Kategorie mit Generator R.[16]
- Sei $\mathscr{A}$ eine Grothendieck-Kategorie mit Generator G. Dann ist die Kategorie $\mathscr{Ch}(\mathscr{A})$ der Kettenkomplexe in $\mathscr{A}$ eine Grothendieck-Kategorie mit Generator $G \coprod \Sigma^{-1}G$.[17]

4.7.5 Beispiel In [Fra, Abschnitt 3] zeigt Franke, dass die unbeschränkte derivierte Kategorie[18] einer Grothendieck-Kategorie existiert und die Bedingungen seines Darstellbarkeitssatzes (Theorem 4.1.5) erfüllt.

Sei $\mathscr{A}$ eine Grothendieck-Kategorie mit Generator G. Der Generator wird in der derivierten Kategorie $D(\mathscr{A})$ ein starker Erzeuger. Genauer gesagt gilt $\langle G \rangle_{\coprod}^{\aleph_1} = D(\mathscr{A})$, s. [Fra, Proposition 3.3].
Die Kategorien $\mathscr{C}(\kappa)$, deren Existenz in der Bedingung an $\mathfrak{M}(G)$ für eine unbeschränkte Klasse genügend großer Kardinalzahlen κ gefordert sind, sind in diesem Beispiel Unterkategorien der Form $D(\mathscr{A})_{\leq\kappa} \subset D(\mathscr{A})$. Eine solche Kategorie $\mathscr{C}(\kappa) = D(\mathscr{A})_{\leq\kappa}$ besteht aus Komplexen $X = (X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $\sup_i \mathrm{card}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G, X_i)) \leq \kappa$ sowie den dazu quasiisomorphen Komplexen.

4.7.6 Bemerkung Neeman zeigt in [Ne3, Theorem 0.2] ebenfalls, dass in der unbeschränkten derivierten Kategorie einer Grothendieck-Kategorie der Brownsche Darstellbarkeitssatz gilt.

Er benutzt dazu die Darstellung einer solchen Kategorie als Quotient (d.h. Verdier-Lokalisierung) der derivierten Kategorie einer Modulkategorie $D(\mathrm{Mod}(R))$ nach Alonso, Jeremias und Souto (vgl. [Ne3, Abschnitt 2]). Weil $D(\mathrm{Mod}(R))$ wohl erzeugt ist, kann man zeigen, dass diese Eigenschaft auch für $D(\mathscr{A})$ gilt.

Bei diesem Beispiel lässt sich also sowohl Neemans als auch Frankes Darstellbarkeitssatz anwenden, weil $D(\mathscr{A})$ sowohl wohl erzeugt als auch stark erzeugt (von einer Menge T mit unbeschränktem $\mathfrak{M}(T)$) ist.

[16] Vgl. [KS, Example 5.2.2]
[17] Vgl. [KS, Proposition 14.1.3]
[18] Vgl. Beispiel 3.6.3.

4.7.7 Beispiel Zum Abschluss betrachten wir noch einmal die stabile Homotopiekategorie. Die in Frankes Darstellbarkeitssatz an $\mathfrak{M}(T)$ gestellte Bedingung ist auch hier relevant. Neeman hat einen Spezialfall von Satz 4.6.1 in [Ne2, Lemma D.1.7] für die stabile Homotopiekategorie bewiesen.

Sei $\alpha > \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl, $\mathscr{T} := SH$ (vgl. Bsp. 3.6.1) und $X \in \mathscr{T}^\alpha$ ein α-kompaktes Objekt. Dann gilt

$$\mathrm{card}(\mathrm{Hom}(\mathbb{S}^n, X)) < \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Der Beweis benutzt, dass $T := \{\mathbb{S}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ein kompaktes Erzeugendensystem von SH ist (vgl. Beispiel 3.6.1). Ansonsten entspricht der Beweis einer vereinfachten Fassung der Beweisrichtung $\langle T\rangle^\kappa \subset \mathscr{C}(\kappa)$ im Beweis von Satz 4.6.1.

Index

Literaturverzeichnis

[Bass] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, Benjamin (1968).

[Bo1] A. K. Bousfield, *The localization of spaces with respect to homology*, Topology 14 (1975), S. 133-150.

[Bo2] A. K. Bousfield, *The localization of spectra with respect to homology*, Topology 18 (1979), S. 257-281.

[Bre] G. E. Bredon, *Topology and geometry*, Springer (1993).

[Br1] E. H. Brown, Jr., *Cohomology Theories*, Annals of Mathematics, vol. 75 (1962), S. 467-484.

[Br2] E. H. Brown, Jr., *Abstract Homotopy Theory*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 119, No. 1 (1965), S. 79-85.

[Cie] K. Ciesielski, *Set Theory for the Working Mathematician*, Cambridge University Press (1997).

[Gab] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 90 (1962), S. 323-448.

[GU] P. Gabriel, F. Ulmer, *Lokal präsentierbare Kategorien*, vol. 221, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1971.

[Fra] J. Franke, *On the Brown representability theorem for triangulated categories*, Topology 40 (2001), S. 667-680.

[Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. lecture note series 119, Cambridge University Press (1988).

[Hel] A. Heller, *On the representability of homotopy functors*, Journal of London Mathematical Society 23(2) (1981), S. 551-562.

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer (2006).

[Kel] B. Keller, *Derived categories and their uses*, Handbook of algebra, Vol. 1, North-Holland (1996), S. 671-701.

[Kr1] H. Krause, *On Neeman's well generated triangulated categories*, Documenta Mathematica 6 (2001), S. 121-126.

[Kr2] H. Krause, *A Brown representability theorem via coherent functors*, Topology 41 (2002), S. 853-861.

[Kr3] H. Krause, *Derived categories, resolutions, and Brown representability*, arXiv math.KT/0511047 (2006).

[Kr4] H. Krause, *Localization theory for triangulated categories*, in: Triangulated categories, London Math. Soc. lecture note series 375, Cambridge Univ. Press (2010).

[ML] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics vol. 5, Springer (1971).

[Ne1] A. Neeman, *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, Journal AMS vol. 9 no. 1 (1996), S. 205-236.

[Ne2] A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of Mathematics Studies, 148, Princeton University Press (2001).

[Ne3] A. Neeman, *On the derived category of sheaves on a manifold*, Documenta Mathematica 6 (2001), S. 483-488.

[Wei] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press (1994).