BERGISCHE UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

GAUSS-STRASSE 20
WUPPERTAL

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND
NATURWISSENSCHAFTEN

SoSe 2016

27.7.2016

Klausur zur Analysis 1

Apl. Prof. Dr. G. Herbort

Aufgabe 1. a) Was verstehen wir unter dem Grenzwert einer Folge?

b) Gegeben sei die durch $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ (für $n \geq 1$) rekursiv definierte Folge. Untersuchen Sie $a_n - \frac{2}{3}$. Was ist das Bildungsgesetz?

c) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$?

(3+6+3 Punkte)

Lösung. a) Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so gefunden werden kann, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

b) Setzen wir $b_n := a_n - \frac{2}{3}$, so gilt $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = -\frac{1}{6}$ und $b_{n+2} = \frac{b_{n+1} + b_n}{2}$.
Es folgt

$$b_3 = \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\,(\frac{1}{2})^2,\ \ b_4 = -\frac{1}{24} = -\frac{1}{3}\,(\frac{1}{2})^3,\ b_5 = \frac{1}{48} = \frac{1}{3}\,(\frac{1}{2})^4$$

Das führt uns auf die Vermutung $b_n = \frac{1}{3}\,(-\frac{1}{2})^{n-1}$. Beweis durch Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ und $n = 2$ ist klar. Gilt die Vermutung für alle $k \leq n$, so auch für $n + 1$, denn

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{b_n + b_{n-1}}{2} = \frac{1}{6}\left((-\frac{1}{2})^{n-1} + (-\frac{1}{2})^{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{6}\,(-\frac{1}{2})^{n-1}(\,1-2) = \frac{1}{3}\,(-\frac{1}{2})^n \end{aligned}$$

c) Es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3} + b_n) = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 2. Sei

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ,\ \text{wenn} \quad x \in Q \\ -2x^2 + 3x + 4 & ,\ \text{wenn} \quad x \notin Q \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f in $x_0 = -1$ und $x_1 = \frac{3}{2}$ stetig ist.

b) Ist f in irgendeinem Punkte $x_2 \notin \{-1, \frac{3}{2}\}$ stetig?

c) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge. Wann nennen wir eine Funktion $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

d) Ist die Funktion $f(x) := -\log x$ auf $(0,1)$ gleichmäßig stetig? (Antwort begründen) (3+5+2+2 Punkte)

Lösung. a) Wir haben $f(-1) = -1$ und $-2x^2 + 3x + 4 = -1 + (x+1)(-2x+5)$. Also gilt für $x \in [-2, 0]$ sicher

$$|f(x) + 1| \leq 9|x + 1|$$

Damit ist erkannt, dass f in -1 stetig sein muss.

Ähnlich haben wir auch $|f(x) - 4| \leq 2|x - \dfrac{3}{2}|$ auf $[1, 2]$. Somit ist f auch bei x_1 stetig.

b) Ist $x_2 \in \mathbb{R}$ und f in x_2 stetig, so muss $f(x_2) = \lim_{n\to\infty} f(x_2 + \frac{\sqrt{2}}{n}) = -2x_2^2 + 3x_2 + 4$ werden und gleichzeitig $f(x_2) = \lim_{n\to\infty} f(x_2 + \frac{1}{n}) = 2x_2 + 1$. So folgt

$$-2x_2^2 + 3x_2 + 4 = 2x_2 + 1, \qquad 2x_2^2 - x_2 = 3, \qquad x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{3}{2}$$

und damit $x_2 \in \{x_0, x_1\}$.

Also kann f in den Punkten $x_2 \notin \{x_0, x_1\}$ nicht stetig sein.

c) Wir nennen $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gewählt werden kann, dass $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$, sobald $|t - s| < \delta$ wird.

d) Es gilt für jedes $\delta > 0$, dass $|e^{-n-1} - e^{-n}| < 2e^{-n} < \delta$, wenn nur n groß genug ist und dennoch wird $|\log e^{-n-1} - \log e^{-n}| = 1$, so dass zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kein $\delta > 0$ mit der geforderten Eigenschaft zu finden ist.

Aufgabe 3. a) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\pi}{4^n}) x^{2n} \quad ?$$

b) Sei $f_n(x) := x - \dfrac{[2^n x]}{2^n}$, für $x \in \mathbb{R}$. Dabei bedeutet $[y]$ für $y \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, welche noch $\leq y$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Funktionenreihe $f := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

c) Sei f wie unter b). Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $2^n x_0 \notin \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist f in x_0 stetig.

(4+5+3 Punkte)

Lösung. a) Setzen wir $a_p := \sin(\frac{\pi}{4^p})$, und $g(y) := \sum_{p=1}^{\infty} a_p y^p$, so wird $f(x) = g(x^2)$. Der Konvergenzradius von g ist nun $\varrho = 1/\ell$, mit

$$\ell = \overline{\lim}_{p\to\infty} \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sin(\frac{\pi}{4^p})} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{4} \sqrt[p]{\pi} \cdot \sqrt[p]{\frac{\sin(\frac{\pi}{4^p})}{\frac{\pi}{4^p}}} = \frac{1}{4},$$

denn

$$\sqrt[p]{\pi},\ \sqrt[p]{\frac{\sin(\frac{\pi}{4^p})}{\frac{\pi}{4^p}}} \longrightarrow 1$$

mit $p \to \infty$. Also ist $\varrho = 4$ und f konvergiert innerhalb $(-r, r)$ genau dann, wenn $0 < r < 2$.

b) Es gilt $[2^n x] \le 2^n x$, also $2^{-n}[2^n x] \le x$, und damit $f_n(x) \ge 0$. Da nun $[2^n x] > 2^n x - 1$, muss $f_n(x) \le x - \dfrac{2^n x - 1}{2^n} = 2^{-n}$ sein, somit haben wir $0 \le f_n(x) \le 2^{-n}$, für alle n und x, so dass zunächst der Grenzwert $f(x)$ für jedes x existiert. Da weiter

$$0 \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N},$$

ist die Reihe f auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.
c) Die Funktion $y \longmapsto [y]$ ist in allen Punkten $y_0 \notin \mathbb{Z}$ stetig, also ist jedes f_n bei x_0 stetig. Da die Reihe f gleichmäßig konvergiert, ist auch f in x_0 stetig.

Aufgabe 4. a) Sei $f(x) := \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{2x^3}{3} - 4x^2 - 8x$. Welche lokalen Extremalstellen hat f ? Zeigen Sie, dass f ein absolutes Minimum annimmt. Wo liegt es?
b) Berechnen Sie den größten und den kleinsten Wert, den f auf $[-2, 1]$ annimmt.
(8 + 4 Punkte)

Lösung. a) Es gilt ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8 \\ &= 2(x+1)(x^2-4) = 2(x+1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Also ist $f' < 0$ auf $(-\infty, -2)$ und $f' > 0$ auf $(-2, -1)$, weiter ist $f' < 0$ auf $(-1, 2)$ und $f' > 0$ auf $(2, \infty)$. Daher liegt bei -2 ein lokales Minimum für f, ebenso bei 2. Bei -1 ist ein lokales Maximum.
Ist $|x| \ge 10$, so wird $\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{2x^3}{3} - 4x^2 - 8x = \dfrac{x^4}{2}(1 + \dfrac{4}{3x} - \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{16}{x^3}) \ge \dfrac{x^4}{4} > 0$. Damit ist wegen $f(2) < 0$ der Wert $\min_{[-10,10]} f < 0$ ein absolutes Minimum für f. Es wird an einer Stelle $x_0 \in (-10, 10)$ angenommen. Offenbar bleibt nur $x_0 = 2$, da $f(-1) > 0, f(-2) > 0 > f(2)$.

Weitere lokale Extremalstellen treten nicht auf, da f' keine weiteren Nullstellen hat.

b) Nach den Betrachtungen aus a) haben wir $f \geq f(-2)$ auf $[-2,-1]$ und $f \geq f(1)$ auf $[-1,1]$. Wegen $f(1) = -\frac{65}{6} < f(-2) = \frac{8}{3}$ ist dann $f \geq f(1) = -10\dfrac{5}{6}$ auf $[-2,1]$. Da $f' \geq 0$ auf $[-2,-1]$ und $f' \leq 0$ auf $[-1,1]$, haben wir $f \leq f(-1) = \dfrac{23}{6}$ auf $[-2,1]$.

Aufgabe 5. Berechnen Sie

$$I_1 := \int_{-3}^{2} |x-1||x+2| dx, \qquad I_2 := \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx$$

Für I_2 benutzen Sie die Substitutionsregel. (6+6 Punkte)

Lösung. Sei $f(x) := (x-1)(x+2)$. Es gilt dann $f(x) \geq 0$ auf $[-3,-2] \cup [1,2]$ und $f(x) < 0$ auf $(-2,1)$. Also wird

$$I_1 = \int_{-3}^{2} |f(x)| dx = \int_{-3}^{-2} f(x) dx - \int_{-2}^{1} f(x) dx + \int_{1}^{2} f(x) dx$$

Da $f(x) = x^2 + x - 2$, wird $F(x) := \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ eine Stammfunktion für f, so dass

$$I_1 = F(-2) - F(-3) - (F(1) - F(-2)) + F(2) - F(1) = 2F(-2) - 2F(1) + F(2) - F(-3) = \frac{49}{6}$$

Bei der Berechnung von I_2 schreiben wir $x = t^2$, so dass

$$I_2 = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2 - 2\mathrm{arctg}\,(1) = 2 - \frac{\pi}{2}$$