SS 04

27. 09. 2004

# Klausur zur Mathematik für Maschinentechniker

Apl. Prof. Dr. G. Herbort

**Aufgabe 1**. Es sei $f$ die folgende Funktion

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 - 39x - 36}{x-1}$$

(i) Was ist der Definitionsbereich von $f$? Wo ist $f$ differenzierbar, wo nicht? (2 Punkte)

(ii) Was sind die Nullstellen von $f$? (Hilfe: Eine Nullstelle liegt bei $x = 4$) (3 Punkte)

(iii) An welchen Stellen hat $f$ lokale Extrema (Hilfe: $f'(-3/2) = 0$) ? (4 Punkte)

(iv) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = 4x^2 - 39 - \frac{75}{x-1}$$

Wo also hat $f$ Wendepunkte ? (3 Punkte)

*Lösung.* i) Die Funktion ist auf $I\!R \setminus \{1\}$ definiert und in 1 nicht stetig fortsetzbar, weil $f(1+\frac{1}{n}) = -75n - 35 + \frac{4+8n}{n^2} \longrightarrow -\infty$, wenn $n \longrightarrow \infty$.

ii) Es gilt $f(4) = 0$. Wenden wir das Hornerschema auf den Zähler von $f$ an, so finden wir

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x^2 - 39x - 36 &= (x-4)(4x^2 + 12x + 9) \\ &= 4(x-4)(x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}) \\ &= 4(x-4)(x+\frac{3}{2})^2 \end{aligned}$$

Somit hat $f$ genau bei $x + 4$ und $x = -\frac{3}{2}$ eine Nullstelle.

iii) Mit der Quotientenregel erhalten wir für die 1. Ableitung von $f$

$$f'(x) = \frac{(12x^2 - 8x - 39)(x-1) - 4x^3 + 4x^2 + 39x + 36}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{12x^3 - 20x^2 - 31x + 39 - 4x^3 + 4x^2 + 39x + 36}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{8x^3 - 16x^2 + 8x + 75}{(x-1)^2}$$

Mit dem Hornerschema erhalten wir jetzt

$$8x^3 - 16x^2 + 8x + 75 = 8(x + \frac{3}{2})(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{25}{4})$$

Da aber

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{25}{4} = (x - \frac{7}{4})^2 + \frac{51}{16} > 0$$

überall, ist $-\frac{3}{2}$ die einzige Nullstelle von $f'$. Wir haben also

$$f'(x) = 8(x + \frac{3}{2})\frac{(x - \frac{7}{4})^2 + \frac{51}{16}}{(x-1)^2}$$

Somit ist $f'(x) < 0$, wenn $x < -\frac{3}{2}$ und $f'(x) > 0$, wenn $x > -\frac{3}{2}$.

Bei $-\frac{3}{2}$ liegt also ein lokales Minimum für $f$, das jedoch kein absolutes Minimum sein kann, da $f(1 + \frac{1}{n}) \longrightarrow -\infty$, wenn $n \longrightarrow \infty$.

(iv) Die Darstellung

$$f(x) = 4x^2 - 39 - \frac{75}{x-1}$$

erhalten wir aus dem Divisionsalgorithmus. Damit können wir leicht $f''$ berechnen. Es folgt

$$f''(x) = 8 - \frac{150}{(x-1)^3}, \quad f'''(x) = \frac{450}{(x-1)^4} \neq 0$$

Eine Wendestelle ergibt sich bei $x_0 = 1 + \frac{\sqrt[3]{150}}{2}$. Weitere Wendepunkte sind nicht vorhanden, da $x_0$ die einzige Nullstelle von $f''$ ist.

**Aufgabe 2**. a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 3x^3 - 2x + 4$$

nur eine reelle Nullstellen hat, und zwar im Intervall $(-1.5, -1.2)$.

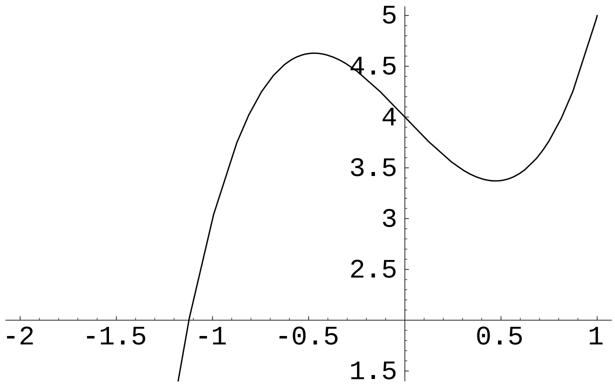
(4 Punkte)

b) Prüfen Sie, ob das Newtonverfahren anwendbar ist und berechnen Sie mit dem Newtonverfahren diese Nullstelle

(2+4 Punkte)

*Lösung*. a) Wir leiten $f$ ab und finden $f'(x) = 9x^2 - 2 = 9(x - x_+)(x - x_-)$ mit Nullstellen bei $x_\pm = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$. Es gilt $f'(x) > 0$, wenn $x < x_-$ oder $x > x_+$ und $f'(x) < 0$, wenn $x_- < x < x_+$. Es folgt $f(x) \geq f(x_+)$, wenn $x \geq x_-$. Da $f(x_+) > 0$, ist also auf $[x_-, \infty)$ keine Nullstelle vorhanden.

Da $f$ auf $(-\infty, x_-)$ streng monoton wächst, gibt es auf diesem Bereich höchstens eine Nullstelle. Dass es wirklich eine solche gibt, folgt aus dem Mittelwertsatz.




b) Es gilt $f'(x) = 9(x - x_+)(x - x_-) > 0$ auf $(-\infty, x_-)$ und $f''(x) = 18x < 0$. Da also $f'$ und $f''$ auf dem Intervall $(-1.5,\ -1.2)$ das Vorzeichen nicht ändern, ist das Newtonverfahren anwendbar. Sei

$$R(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{6x^3 - 4}{9x^2 - 2}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_1 := R(-1.4) &= -1.30844 \\ x_2 := R(x_1) &= -1.30073 \\ x_3 := R(x_2) &= -1.300680894 \\ x_4 := R(x_3) &= -1.300680891 \end{aligned}$$

Dann ist $f(x_3) \in (-10^{-8}, 0)$, also $x_3$ eine bis auf 8 Nachkommastellen exakte Nullstelle von $f$.

**Aufgabe 3**. Studieren Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 7x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 9x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & - & 19x_2 & + & 13x_3 & + & 25x_4 & = & a \end{array}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ sein soll.

i) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix $\mathscr{A}$ (1 Punkt)

ii) Für welches $a$ ist das Gleichungssystem lösbar? (4 Punkte)

iii) Lösen Sie das Gleichungssystem für dieses $a$ vollständig. (5 Punkte)

*Lösung.* i) und ii): Wir nehmen an der erweiteten Matrix $\left(\mathscr{A}\left|\begin{matrix}1\\3\\a\end{matrix}\right.\right)$ elementare Zeilenumformungen vor. Die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & -19 & 13 & 25 & a \end{array}\right)$$

geht, wenn wir von der 3. Zeile das 3-fache der 1. Zeile abziehen, in

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 7 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & -7 & -8 & 31 & a-3 \end{array}\right)$$

über. Dann nehmen wir die 1. Zeile mal mit 6 und die 2. Zeile mit 9. Es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & -24 & 42 & -12 & 6 \\ 18 & -45 & 18 & 81 & 27 \\ 0 & -7 & -8 & 31 & a-3 \end{array}\right)$$

Subtraktion der 1. Zeile von der 2. Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & -24 & 42 & -12 & 6 \\ 0 & -21 & -24 & 93 & 21 \\ 0 & -7 & -8 & 31 & a-3 \end{array}\right)$$

Nun ziehen wir noch von der 3. Zeile (1/3) mal die 2. Zeile ab und finden

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 18 & -24 & 42 & -12 & 6 \\ 0 & -21 & -24 & 93 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-10 \end{array}\right)$$

Wir teilen die 1. Zeile wieder durch 6 und die 2. Zeile durch 3. Es entsteht

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & -8 & 31 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-10 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat somit genau dann eine Lösung, wenn $a = 10$ ist.

iii) Das gegebene Gleichungssystem ist dem folgenden äquivalent

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 7x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & - & 7x_2 & - & 8x_3 & - & 31x_4 & = & 7 \end{array}$$

Das sehen wir als Gleichungssystem in $x_1$ und $x_2$ an. Die Lösung lautet

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 - \frac{27}{7}x_3 + \frac{46}{7}x_4 \\ x_2 & = & -1 - \frac{8}{7}x_3 + \frac{31}{7}x_4 \end{array}$$

Dem entnehmen wir, dass der allgemeine Lösungsvektor durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -27 \\ -8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 46 \\ 31 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in I\!R$ gegeben ist.

**Aufgabe 4**. a) Berechnen Sie $I := \int_{-2}^{3} |x^2 - x - 2| dx$ (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

$$f_1(x) = x \sin(2x), \qquad f_2(x) = \frac{x^2}{x^3+5}$$

Benutzen Sie dabei Ihre Formelsammlung nicht! (6 Punkte)

*Lösung.* a) Sei $f(x) = x^2 - x - 2$. Dann ist $f(x) = (x+1)(x-2)$ und $f$ hat Nullstellen bei $-1$ und 2. Auf $(-2,-1)$ ist $f$ positiv, ebenso auf $(2,3)$, während $f$ auf $(-1,2)$ negative Werte hat. Daher gilt

$$\int_{-2}^{3} |x^2 - x - 2| dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx - \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx$$

Als Stammfunktion von $f$ dient uns $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} |x^2 - x - 2|dx &= F(-1) - F(-2) - (\,F(2) - F(-1)\,) + F(3) - F(2) \\ &= 2F(-1) - 2F(2) + F(3) - F(-2) = \frac{49}{6}\end{aligned}$$

b) Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned}\int x\sin(2x)dx &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\end{aligned}$$

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+5)$$

**Aufgabe 5**. Gegeben seien die beiden Geraden
$G_1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + I\!R \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $G_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + I\!R \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$
a) Welchen Abstand haben $G_1$ und $G_2$ voneinander?

(3 Punkte)

b) Sei $E$ die Ebene $E = \{\vec{x} \in I\!R^3 \,|\, x_1 - 6x_2 + x_3 = 21\}$. In welchen Punkten schneiden $G_1$ und $G_2$ die Ebene $E$?

(4 Punkte)

c) Berechnen Sie die Projektion von $G_1$ auf $E$

(4 Punkte)

*Lösung*. a) Wir bilden zuerst das Vektorprodukt der Richtungsvektoren und finden

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -25 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Der Vektor hat die Länge $\sqrt{13^2 + 25^2 + 11^2} = \sqrt{915}$. Der Verbindungsvektor der beiden Aufpunkte ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sein Skalarprodukt mit $\vec{n}$ ist

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -73$$

Der gewünschte Abstand ist dann

$$d = \frac{73}{\sqrt{915}} = 2,41.$$

b) Der Schnittpunkt von $G_1$ mit $E$ sei $\vec{S}_1$. Dann gilt

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soll $\vec{S}_1 \in E$ sein, so muss

$$5 + 3\lambda_1 - 6(7 + 2\lambda_1) + 2 + \lambda_1 = 21$$

sein, also

$$-8\lambda_1 - 35 = 21$$

Somit ist $\lambda_1 = -7$ und $\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Entsprechend finden wir, dass $G_2$ die Ebene $E$ in $\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$ schneidet.

c) Wir müssen nur noch den Richtungsvektor der Projektionsgeraden bestimmen. Dieser ist gegeben durch

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{38} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 61 \\ 14 \\ 23 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat das Längenquadrat 38. Die gesuchte Gerade ist also

$$P_E(G_1) = \vec{S}_1 + I\!R\vec{w} = \begin{pmatrix} -16 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} + I\!R \begin{pmatrix} 61 \\ 14 \\ 23 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6**. Untersuchen Sie die folgende Differentialgleichung:

$$(*) \qquad y''' + 6y'' - 32y = x^2 - 1$$

a) Bestimmen Sie 3 Basislösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. (Das charakteristische Polynom hat ganzzahlige Nullstellen)

(3 Punkte)

b) Finden Sie eine partikuläre Lösung. (Tipp: Ansatz mit Polynom 2. Grades )

(3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung $u$ von (*), für die zusätzlich gilt:
$u(0) = \frac{1}{64}$, $u'(0) = 0$, $u''(0) = -\frac{9}{64}$.

(5 Punkte)

*Lösung.* a) Das charakteristische Polynom $P(X) = X^3 + 6X^2 - 32$ hat die Linearfaktorzerlegung $P(X) = (X-2)(X+4)^2$, was mit dem Hornerschema zu finden ist.

Es folgt, dass $e^{2x}, e^{-4x}$, und $xe^{-4x}$ als Basislösungen dienen können.

b) Der Polynomansatz $u_p(x) = ax^2 + bx + c$ wird in die Dgl eingesetzt und liefert

$$6u_p''(x) - 32u_p(x) = 12a - 32ax^2 - 32bx - 32c = x^2 - 1$$

Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir daraus

$$a = -\frac{1}{32}, \quad b = 0, \quad c = \frac{5}{256}$$

also ist

$$u_p(x) = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{256}$$

eine partikuläre Lösung.

c) Wir machen den Ansatz

$$u(x) = u_p(x) + Ae^{2x} + (B + Cx)e^{-4x}$$

und berechnen die Ableitungen. Es entsteht

$$u'(x) = -\frac{1}{16}x + 2Ae^{2x} + (-4B + C - 4Cx)e^{-4x}$$

$$u''(x) = -\frac{1}{16} + 4Ae^{2x} + (16B - 8C + 16Cx)e^{-4x}$$

Die Startbedingungen sagen, dass

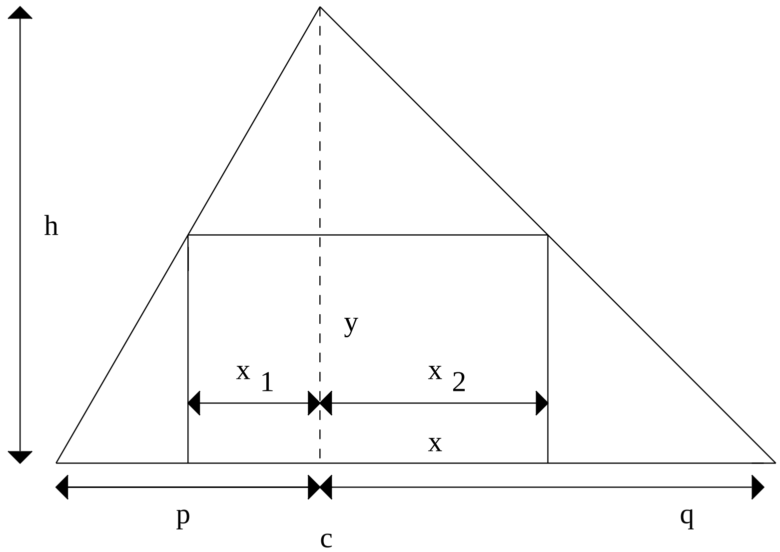
$$\begin{aligned} A + B + \tfrac{5}{256} &= \tfrac{1}{64} \\ 2A - 4B + C &= 0 \\ 4A + 16B - 8C - \tfrac{1}{16} &= -\tfrac{9}{64} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird durch $A = -\frac{1}{256}, B = 0,\ C = \frac{1}{128}$ gelöst.

So erhalten wir als Lösung für das Startwertproblem

$$u(x) = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{256} - \frac{1}{256}e^{2x} + \frac{1}{128}xe^{-4x}$$

**Aufgabe 7**. Gegeben sei ein Dreieck mit Grundseite $c$ und Höhe $h$. Ihm soll ein Rechteck maximalen Flächeninhalts einbeschrieben werden, wobei eine Seite dieses Rechtecks auf der Seite $c$ liegen soll.




a) Drücken Sie $y$ durch $h, c$ und $x$ aus, also $y = y(x)$. (5 Punkte)
b) Wo hat $x \cdot y(x)$ ein Maximum? (5 Punkte)

*Lösung.* a) Einer der Strahlensätze liefert uns, dass

$$\frac{x_1}{h-y} = \frac{p}{h}, \quad \frac{x_2}{h-y} = \frac{q}{h}$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen, so folgt

$$\frac{x}{h-y} = \frac{x_1}{h-y} + \frac{x_2}{h-y} = \frac{p}{h} + \frac{q}{h} = \frac{c}{h}$$

Somit wird, wenn wir nach $y$ auflösen,

$$y = y(x) = h \cdot (1 - \frac{x}{c})$$

und der Flächeninhalt des Rechtecks ist

$$F(x) = x \cdot y(x) = h \cdot x \cdot (1 - \frac{x}{c})$$

b) Wir formen um:

$$F(x) \quad = \quad hx - \frac{hx^2}{c}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{h}{c}(x^2 - cx) \\
&= -\frac{h}{c}\left((x-\frac{c}{2})^2 - \frac{c^2}{4}\right) \\
&= \frac{hc}{4} - \frac{h}{c}(x-\frac{c}{2})^2 \\
&\leq \frac{hc}{4}
\end{aligned}
$$

Der größtmögliche Wert, den $F$ annehmen kann, ist also

$$F(\frac{c}{2}) = \frac{hc}{4}$$

Dann ist $y = \frac{h}{2}$.