WS 1999/2000

18. Februar 2000

Klausur zur Mathematik für Maschinentechniker

Priv. Doz. Dr. G. Herbort

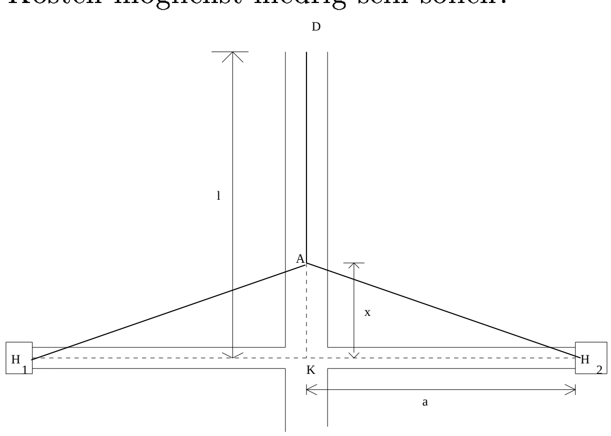
Aufgabe 1. Führen Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 1}$$

eine Kurvendiskussion durch, d.h. Klären Sie folgende Fragen:

(i) Was ist der Definitionsbereich D_f von f? Wo liegen Pole von f? Was ist ihre Ordnung? (ii) Gilt eine der Beziehungen $f(x) = f(-x)$ oder $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in D_f$? iii) Wo ist f stetig, wo differenzierbar und wie oft? iv) Wo liegen Nullstellen von f? v) Berechnung von f', was sind die Monotoniebereiche, wo liegen Extrema (lokale oder absolute?) vi) Was sind die Bereiche strenger Konvexität für f?

Aufgabe 2. Zwei Einzelhöfe H_1 und H_2 liegen $a = 150m$ rechts bzw. links von einem geraden Sträßchen an einem geraden Weg, der zu dem Sträßchen senkrecht verläuft. Sie sollen von dem Nachbardorf D aus eine Wasserleitung erhalten. Wieviele m vor der Kreuzung K muss diese von der Straße abzweigen, wenn ein Meter Einzelleitung 62.5% von 1 Meter Hauptleitung kostet und die Kosten möglichst niedrig sein sollen?



(Tipp: Wieviele Meter umfassen die Leitungen von D nach A und von A nach H_1 und H_2? Man braucht den Meterpreis der Hauptleitung oder den Wert für l nicht zu kennen!)

Aufgabe 3. Studieren Sie für einen Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in I\!R^3$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= b_1 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= b_2 \\ x_1 - 9x_2 - 17x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

i) Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix $\mathscr{A}$ und rg($\mathscr{A}$).
ii) Für welche b ist rg($\mathscr{A}$) =rg($\mathscr{A}$ $|b$) ?
iii) Bestimmen Sie für die Vektoren b aus ii) die Lösungsmenge $\{x \in I\!R^3 \mid \mathscr{A}\, x = b\}$.

Aufgabe 4. a) Sei E die Ebene, auf welcher die drei Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

liegen. Was ist der Abstand des Nullpunktes zu E ?
b) Sei G die Gerade durch die beiden Punkte .

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Finden Sie zwei Ebenen E_1 und E_2 in $I\!R^3$ mit $E_1 \cap E_2 = G$.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Integrale:

$$i) \qquad \int_1^3 \frac{3x^2 + 3x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} dx$$

und

$$ii) \qquad \int_0^2 x^2 \ln(1 + x^3) dx$$

Aufgabe 6. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y' + x \cdot y &= \tfrac{1}{6}x \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 7. a) Zeigen Sie, dass der Punkt $Q = (\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$ unter allen Punkten der Parabel $y = x^2$ den kleinsten Abstand zum Punkt $P = (\frac{1}{4}|\frac{1}{2})$ hat.

b) Wie lang ist das Kurvenstück auf der Parabel zwischen 0 und dem Punkt Q?

Lösungen

Zu Aufgabe 1: i) Der Definitionsbereich von f ist $D_f = I\!R \setminus \{-1, +1\}$. In ± 1 gibt es Pole 1. Ordnung, denn

$$f(x) = 4 - \frac{12}{(x-1)(x+1)}$$

ii) Die Funktion ist gerade.

iii) Auf D_f ist f als Quotient zweier Polynome (wobei das Nennerpolynom keine Nullstellen hat), beliebig oft differenzierbar.

iv) Genau dann ist $f(x) = 0$, wenn $x = \pm 2$.

v) 1. Ableitung: Es gilt $f'(x) = \frac{24x}{(x^2-1)^2}$. also wird $f'(x) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$. Fernr gilt

$$\{x \in D_f \mid f'(x) > 0\} = I\!R^+, \ \ \{x \in D_f \mid f'(x) < 0\} = I\!R^-$$

In 0 hat f ein lokales Minimum, denn links von 0 ist f monoton fallend, rechts von 0 dagegen monoton wachsend. Es gilt $f(0) = 16$, waehrend $f(\sqrt{1.01}) < 16$. Damit hat f bei 0 kein absolutes Minimum.

vi) Es folgt mit der Quotientenregel:

$$f''(x) = -\frac{24(1+3x^2)}{(x^2-1)^3)}$$

Wendepunkte existieren also nicht. Ferner ist f auf $(-1, 1)$ konvex und auf den Intervallen $\{x < -1\}$ und $\{1, \infty\}$ konkav.

Zu Aufgabe 2: Bezeichnen wir den Meterpreis fuer die Hauptleitung mit P, so kostet das Stueck Wasserleitung von D bis A gerade $(l - x) \cdot P$ DM, und die ABschnitte von A bis H und A bis H_2 genau je $0.625 \cdot P \cdot \sqrt{a^2 + x^2}$ DM, also zusammen $(l - x + 1.25\sqrt{a^2 + x^2}) \cdot P$ DM. Gesucht wird ein Minimum fuer

$$f(x) = l - x + 1.25\sqrt{a^2 + x^2}$$

Differenzieren liefert:

$$f'(x) = -1 + 1.25\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Das wird genau dann 0, wenn $x = 4a/3 = 200m$. Ferner wird $f'(x) < 0$, wenn $0 < x < 200m$ und $f'(x) > 0$, wenn $x > 200m$. Bei $x = 200m$ hat f daher ein absolutes Minimum.

Zu Aufgabe 3: i) und iii). Die Koeffizientenmatrix $\mathscr{A}$ des Gleichungssystems ist

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -9 & -17 \end{pmatrix}$$

Die 3. Zeile ist gerade = 4× 1. Zeile - 2. Zeile. Wir nehmen Zeilenumformungen an der erweiterten Matrix $(\mathscr{A}|b)$ vor.

$$(\mathscr{A}|b) \underset{3.\text{Zeile}-4\times 1.\text{Zeile}+2.\text{Zeile}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & -5 & b_1 \\ 3 & 1 & -3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 4b_1 + b_2 \end{array}\right)$$
$$\underset{2.\text{Zeile}-3\times 1.\text{Zeile}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & -5 & b_1 \\ 0 & 7 & 12 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 4b_1 + b_2 \end{array}\right)$$

Wir lesen daraus ab, dass rg $(\mathscr{A}) = 2$ und rg $(\mathscr{A}|b) = 2$ genau dann wird, wenn $b_3 = 4b_1 - b_2$.

iii) Ist $b \in I\!R^3$ ein Vektor mit $b_3 = 4b_1 - b_2$, so können wir das Eliminationsverfahren auf das System

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= b_1 + 5\lambda \\ 7x_2 &= b_2 - 3b_1 - 12\lambda \end{aligned}$$

anwenden, wobei $\lambda \in I\!R$ beliebig gewaehlt werden kann und erhalten den Lösungsraum: $\mathscr{L} = \{x_0 + \lambda x_h \mid \lambda \in I\!R\}$, wobei

$$x_0 = \frac{b_1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b_2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_h = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Zu Aufgabe 4: a) Als Richtumgsvektoren der Ebene E können wir etwa

$$\vec{v_1} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = C - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

waehlen. Dann steht der Vektor

$$\vec{\nu} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = 9\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf E senkrecht, und die Ebene kann durch die Gleichung

$$E: \quad (\vec{x} - A) \cdot \vec{\nu} = 0$$

beschrieben werden. Das ist gleichwertig mit

$$E: \quad 18(x_1 - 1) - 9(x_2 + 2) = \vec{x} \cdot \vec{\nu} = A \cdot \vec{\nu} = 36$$

oder

$$E: \quad 2x_1 - x_2 = 4$$

Der Abstand des Nullpunktes zu E ist daher $d = |\lambda\vec{v}|$, wobei $\lambda \in I\!R$ so gewaehlt werden muss, dass $\lambda\vec{v} \in E$, also $2 \cdot 18\lambda + 9\lambda = 4$. Es ergibt sich $\lambda = 4/45$, und

$$d = \frac{4}{45}|\vec{v}| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

b) Ein Richtungsvektor zu G ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ -5 \end{pmatrix}$. Wir suchen zwei weitere Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, so dass die Menge $\{\vec{u}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ linear unabhaengig wird. Dann leisten die Ebenen $E_1 = \{\vec{P} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v_1} \mid \lambda, \mu \in I\!R\}$ und $E_2 = \{\vec{P} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v_2} \mid \lambda, \mu \in I\!R\}$ das Verlangte. Denn $G \subset E_1 \cap E_2$ (klar). Aber es gilt auch $E_1 \cap E_2 \subset G$. Ist naemlich $\vec{x} = \vec{P} + \lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v_1} \in E_1 \cap E_2$, also $\vec{x} = \vec{P} + \lambda_2\vec{u} + \mu_2\vec{v_2}$, so folgt

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{u} + \mu_1\vec{v_1} - \mu_2\vec{v_2} = 0,$$

was nur fuer $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\mu_1 = \mu_2 = 0$ möglich ist. Damit muss $\vec{x} \in G$ sein.

Zu Aufgabe 5: i) Sei $R(x) = f(x)/g(x)$, wobei $f(x) = 3x^2 + 3x, g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Wegen $g(-1) = 0$ ist g durch $x + 1$ teilbar, und mit Polynomdivision folgt: $g(x) = (x+1)(x^2 + x + 1)$. Da weiter $f(x) = 3x(x+1)$, folgt

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3x}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right) \end{aligned}$$

Nun ist $F_1(x) := \frac{3}{2}\ln(x^2 + x + 1)$ Stammfunktion zu $R_1(x) := \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Eine Umformung von $R_2(x) := \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$ ergibt

$$R_2(x) = 2\frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2 + 1} = F_2'(x),$$

wobei

$$F_2(x) = \sqrt{3}\frac{d}{dx}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Wir erhalten

$$\int_1^3 R(x)dx = \frac{3}{2}\left(F_1|_1^3 - F_2|_1^3\right) = \frac{3}{2}\ln\frac{13}{3} - \sqrt{3}\left(\mathrm{arctg}(7/\sqrt{3}) - \mathrm{arctg}(\sqrt{3})\right)$$

ii) Wir wenden die Substitutionsregel mit $\varphi(x) := x^3$ an und erhalten (wegen $\varphi(0) = 0, \varphi(2) = 8$):

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \ln(1+x^3)dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 \ln(1+\varphi(x))\varphi'(x)dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(2)} \ln(1+u)du \\
&= \frac{1}{3}\left((1+u)\ln(1+u) - 1 - u\right)|_0^8 = 6\ln 3 - \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 6: Wir wenden die Methode der Variation der Konstanten an. Zunaechst schreiben wir $y(x) = f(x)e^{g(x)}$ und errechnen

$$y' + x \cdot y = ((x + g'(x))f(x) + f'(x))e^{g(x)}$$

Wir definieren jetzt $g(x) = -x^2/2$ und lösen das AWP

$$f'(x) = \frac{x}{6}e^{-g(x)} = \frac{x}{6}e^{x^2/2}, \ \ f(0) = 2$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dazu ist

$$f(x) = \frac{1}{6}e^{x^2/2} + \frac{11}{6}$$

Das gegebene AWP wird also durch die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{6} + \frac{11}{6}e^{-x^2/2}$$

gelöst.

Zu Aufgabe 7: a) Jeder Punkte der Parabel $y = x^2$ hat die Form (x, x^2), und das Abstandsquadrat von $P = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ist

$$f(x) = (x - \frac{1}{4})^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - \frac{x}{2} + \frac{5}{16}$$

Wir leiten das ab: $f'(x) = 4x^3 - 1/2$, und finden genau eine Nullstelle, und zwar bei $x = 1/2$. Da $f' < 0$ links von $1/2$ und $f' > 0$ rechts davon, ist bei $1/2$ ein absolutes Minimum fuer f. Es folgt

$$f(x) \geq f(1/2) = |P - Q|^2$$

b) Das Kurvenstueck zwischen 0 und Q hat die Laenge

$$\begin{aligned}
L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+4x^2}dx &= 0.5\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \\
&= 0.5\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\right) \\
&= 0.5\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx + (x\sqrt{1+x^2})|_0^1\right) - 0.5\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \\
&= 0.5\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 + 0.5\sqrt{2} - L
\end{aligned}$$

Also

$$L = 0.25(\ln(x+\sqrt{1+x^2})|_0^1 + \sqrt{2}) = 0.25\ln(1+\sqrt{2}) + 0.25\sqrt{2}$$