Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Anna-Louise Grensing

Musterlösung zur Klausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (8 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Aussage	wahr	falsch
Die Hintereinanderausführung zweier surjektiver Abbildungen ist manchmal injektiv.	$X\square$	$\square$
Jede Äquivalenzrelation auf einer endlichen Menge ist eine endliche Menge.	$X\square$	$\square$
In einer Gruppe gibt es stets ein Element x mit $x \cdot x = x$.	$X\square$	$\square$
Jede injektive lineare Abbildung zwischen isomorphen endlichdimensionalen Vektorräumen ist surjektiv.	$X\square$	$\square$
Eine Basis eines Vektorraumes ist eindeutig bestimmt.	$\square$	$X\square$
Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $n-1$ Elementen läßt sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ verlängern.	$\square$	$X\square$
Jedes Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ mit $n+1$ Elementen läßt sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ verkürzen.	$X\square$	$\square$
Sind V und W endlichdimensionale Vektorräume, so ist jede lineare injektive Abbildung von V nach W schon surjektiv.	$\square$	$X\square$
Der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems kann leer sein.	$\square$	$X\square$
Teilsysteme linear unabhängiger Systeme lassen sich zu Basen ergänzen.	$X\square$	$\square$
Der Schnitt zweier dreidimensionaler Unterräume in einem Vektorraum ist niemals leer.	$X\square$	$\square$
Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren definiert eine Äquivalenzrelation.	$X\square$	$\square$
Durch die lineare Abbildung l_A ist die Matrix A schon eindeutig bestimmt.	$X\square$	$\square$
Der Spaltenrang ist invariant unter Zeilenoperationen.	$X\square$	$\square$
Isomorphe Vektorräume haben stets gemeinsame Basen.	$\square$	$X\square$
Determinantenfunktionen sind stets linear.	$\square$	$X\square$

Erläuterungen dazu:

a) Wahr, z.B. ist die Komposition $\mathrm{id} \circ \mathrm{id}$ injektiv.

b) Wahr: eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge R von $X \times X$. Für endliches X ist auch $X \times X$ und damit auch R endlich.

c) Wahr: gilt schon für x das neutrale Element der Gruppe.

d) Wahr: Satz aus der Vorlesung.

e) Falsch: im Allgemeinen haben Vektorräume viele Basen.

f) Falsch: z.B. lässt sich $(0, \ldots, 0)$ nicht zu einer Basis verlängern.

g) Wahr: Basisauswahlsatz.

h) Falsch: z.B. ist die Abbildung $0 \to V$ immer injektiv, aber im Allgemeinen nicht surjektiv.

i) Falsch: die 0 liegt immer im Lösungsraum von $Ax = 0$.

j) Wahr: Teilmengen linear unabhängiger Systeme sind linear unabhängig, lassen sich also nach Basisergänzungssatz zu einer Basis ergänzen.

k) Wahr: der Schnitt von Unterräumen enthält immer 0.

l) (In der Aufgabenstellung hätte „zweier Vektoren ungleich 0“ stehen sollen. Die Aufgabe wurde deshalb aus der Wertung genommen.) Wahr: die drei Axiome für eine Äquivalenzrelation sind schnell nachgeprüft.

m) Wahr: Satz aus der Vorlesung.

n) Wahr: Spaltenrang gleich Zeilenrang, dieser bleibt unter Zeilenoperationen gleich nach Satz aus der Vorlesung.

o) Falsch: z.B. ist $\langle e_1 \rangle \subset K^2$ isomorph zu K^1, aber die Elemente sind einmal Vektoren der Länge 2, einmal der Länge 1, also können sie keine gemeinsame Basis haben.

p) Falsch: das ist ein Beispiel aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es sei X eine Menge. Untersuchen Sie die beiden folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie jeweils die Faser der leeren Menge:

$$f\colon X \longrightarrow \mathcal{P}(X), x \longmapsto \{x\},$$
$$g\colon \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), (A, B) \longmapsto A \cup B.$$

Lösung:

f ist injektiv, denn aus $f(x) = f(y)$ folgt $\{x\} = \{y\}$ und damit $x = y$. f ist nie surjektiv, denn $\emptyset$ liegt nicht im Bild. Insbesondere $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Sei $X \neq \emptyset$. Dann ist g nicht injektiv, denn für ein beliebiges $x \in X$ ist

$$g(\{x\}, \emptyset) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\} = \emptyset \cup \{x\} = g(\emptyset, \{x\}).$$

(Für $X = \emptyset$ ist g injektiv). g ist auch stets surjektiv, denn für $A \subset X$ ist $g(A, \emptyset) = A \cup \emptyset = A$. Zudem gilt $g^{-1}(\emptyset) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

In $\mathbb{R}^4$ sei U der Unterraum der Vektoren mit Koordinatensumme 0 und V der Spann von $e_1 - e_2$, $e_3 - e_4$ und $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Bestimmen Sie Basen von U und $U \cap V$.

Lösung:

Eine Basis von $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$ ist z.B. $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$.

Um $U \cap V$ zu bestimmen, berechnen wir die Koordinatensumme einer beliebigen Linearkombination

$$a(e_1 - e_2) + b(e_3 - e_4) + c(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

der drei Basisvektoren von V. Diese ist $4c$. Also ist $U \cap V$ der Spann von den zwei Vektoren $e_1 - e_2$, $e_3 - e_4$, die auch schon eine Basis bilden.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{Q}$) eine Basis von $\mathrm{Kern}(l_A)$ für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung:

Wir führen mit der Matrix A nacheinander z.B. die folgenden Zeilenoperationen durch: Vertauschen der ersten und der dritte Zeile, Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten, Subtraktion der zweiten Zeile von der dritten, und erhalten die Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix}.$$

Basen von $\mathrm{Kern}(l_A)$ erhalten wir nun durch Rückwärtseinsetzen:
Falls $c = 1$, so ist die letzte Zeile Null, die Variablen x_3, x_4 und x_5 sind frei wählbar, und wir haben $x_1 = x_2 = -x_3 - x_4 - x_5$. Eine Basis ist also z.B. gegeben durch die Vektoren $-e_1 - e_2 + e_3$, $-e_1 - e_2 + e_4$, $-e_1 - e_2 + e_5$.
Falls $c \neq 1$, so ist $x_5 = 0$, die Variablen x_3 und x_4 sind frei wählbar, und wir haben $x_1 = x_2 = -x_3 - x_4$. Eine Basis ist also z.B. gegeben durch die Vektoren $-e_1 - e_2 + e_3$, $-e_1 - e_2 + e_4$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{B,C}(f)$ für $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_1 + e_2$, $f(e_3) = 0$ und $f(e_4) = e_3$ und die Basen $B = (e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3, e_2 - e_4)$, $C = (e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_1)$.

Lösung:

Wir berechnen die Bilder der Elemente aus B unter f durch Matrixmultiplikation: die Abbildung f ist gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wir schreiben die Basis B in die Spalten der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Das Produkt dieser Matrizen ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

die Spalten sind also die Bilder der Vektoren aus B unter f. Um diese in der Basis C auszudrücken, lösen wir parallel vier Gleichungssysteme durch Anwenden des Gaußalgorithmus auf die erweiterte Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Dazu wenden wir nacheinander die folgenden Zeilenoperationen an: Vertauschen der ersten und dritte Zeile, Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten und der dritten und erhalten

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die rechte Hälfte dieser Matrix ist die gesuchte Darstellungsmatrix $M_{B,C}(f)$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von $c, b \in K$) Rang und Determinante der Matrix

$$A = A(c,b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & 0 \\ c & 1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Lösung: Die Determinante dieser Matrix ist $b \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & c \\ c & 1 & c \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}$, und z.B. mit der Regel von Sarrus ergibt sich sofort $\det A(c,b) = bc^2$. Also hat $A(c,b)$ Rang 4 falls $b \neq 0 \neq c$. Ist $c = 0$, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

und man sieht sofort, dass diese Rang 2 hat. Ist $c \neq 0$ aber $b = 0$, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & c & 0 \\ c & 1 & c & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach ein oder zwei Zeilenoperationen sehen wir, dass der Rang 3 ist. Also erhalten wir:

$$\mathrm{Rang}(A(c,b)) = \begin{cases} 2 & , \quad c = 0 \\ 3 & , \quad c \neq 0, b = 0 \\ 4 & , \quad c \neq 0 \neq b. \end{cases}$$