

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“ Blatt 13

Dieses Blatt wird in den ersten Übungen zur Linearen Algebra 2 im Sommersemester 2014 besprochen.

Aufgabe 1.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind über $\mathbb{Q}$, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix mit Hilfe der komplementären Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 6 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -4 \\ 8 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$$

Aufgabe 3.

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$A = A(n) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$$

Beweisen Sie: $\det(A) = n + 1$.

b) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x \in \mathbb{R}$ und

$$A = A(n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & (x + a_{n-1}) \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Beweisen Sie: $\det(A) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1x + a_0$.

Aufgabe 4.

Es seien $r, s, n \in \mathbb{N}$ mit $r + s = n$ und es sei K ein Körper. Weiter sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K)$ eine Blockmatrix mit den „Blöcken“ $A \in M_{r \times r}(K)$, $D \in M_{s \times s}(K)$ und $B \in M_{r \times s}(K)$.
Beweisen Sie:

$$\det M = \det(A) \det(D) .$$