

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“

Blatt 12

Aufgabe 1.

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Determinanten der $n \times n$ -Matrizen $A = (A_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ über $\mathbb{Q}$ mit

- $A_{i,j} = 2014 - j$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- $A_{i,j} = n - i - j$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $\delta \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 - \delta & 1 & \delta & 1 \\ 0 & 1 & 1 - \delta & 0 \\ 1 - \delta & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\delta \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.

Gegeben seien in der symmetrischen Gruppe S_9 die Permutationen $\alpha := (43)(126)$ und $\beta := (12)(743)(56)$ und $\gamma := (1\ 2)(7\ 4\ 5\ 6)(8\ 3\ 9)$ in der Zykelschreibweise.

- Berechnen Sie die Hintereinanderausführungen: $\beta \circ \alpha$ und $\beta \circ \gamma$.
- Bestimmen Sie die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha^m = \text{id}$.
- Bestimmen Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\beta^n = \text{id}$.
- Bestimmen Sie die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $\gamma^k = \text{id}$.

Aufgabe 4.

Wir betrachten den n -Zykel $\kappa := (1\ 2\ 3 \dots n)$.

- Zeigen Sie $\kappa = (1\ n) \circ \dots \circ (1\ 4) \circ (1\ 3) \circ (1\ 2)$.
- Schreiben Sie jetzt κ als Produkt von Transpositionen der Form $(k\ k+1)$ für $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
- Berechnen Sie $\text{sgn}(\kappa)$.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie kann in den Tutorien am 22. und 23. Januar 2014 besprochen werden.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die symmetrische Gruppe S_3 . Für jede Abbildung $\sigma \in S_3$ sei f_σ die folgende Abbildung:

$$f_\sigma: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ x_{\sigma(3)} \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie, dass f_σ stets eine bijektive, lineare Abbildung ist.
- b) Bestimmen Sie für alle $\sigma \in S_3$ die darstellende Matrix $M_{B,B}(f_\sigma)$ bezüglich des Standardbasistupels B von $\mathbb{R}^3$.
- c) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma, \kappa \in S_3$ gilt: $M_{B,B}(f_{(\sigma \circ \kappa)}) = M_{B,B}(f_\sigma)M_{B,B}(f_\kappa)$.