Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe bis 10:00 Uhr
am 22.01.14
in die Postfächer der Tutoren
auf D13

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1"
Blatt 11

Aufgabe 1.
Es seien $c, d \in \mathbb{Q}$ und die folgenden Matrizen gegeben:

$$A(c,d) := \begin{pmatrix} 2 & c \\ 3 & 3 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(c,d) := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ c & 3 & d \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(l_{A(c,d)})$ und von $\mathrm{Bild}(l_{A(c,d)})$ in Abhängigkeit von c und d.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(l_{B(c,d)})$ und von $\mathrm{Bild}(l_{B(c,d)})$ in Abhängigkeit von c und d.

c) Gibt es $c, d \in \mathbb{Q}$, so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht im Bild von $l_{B(c,d)}$ liegt?

d) Bestimmen Sie alle $d \in \mathbb{Q}$, so dass $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Bild}(l_{A(-2,d)})$ liegt.

Aufgabe 2.
Für jedes Paar $i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3\}$ bezeichne $E_{i,j} \in M_{2\times 3}(K)$ die Matrix mit

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$$

für alle $k \in \{1,2\}$ und $l \in \{1,2,3\}$. Bekannterweise ist dann

$$B := (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

eine Basis von $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie bezüglich B die darstellende Matrix $M_{B,B}(f)$ der Abbildung $f\colon M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ mit:

$$f(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Aufgabe 3.
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es sei $f\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, so dass $f \circ f = f$ gilt. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$

b) $\mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Kern}(f) = V$
Hinweis: Wenden Sie auf $v \in V$ die Abbildung f an.

c) Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon K^6 \longrightarrow K^6$ mit $f \circ f = f$ und $\mathrm{dimBild}(f) = 3$.

Aufgabe 4.
Es seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\dim \mathrm{Bild}(f) \geq \dim \mathrm{Kern}(f)$.

b) $\dim \mathrm{Bild}(f + f) = \dim \mathrm{Bild}(f)$.

c) $\dim \mathrm{Bild}(g \circ f) \geq \max(\dim \mathrm{Bild}(g), \dim \mathrm{Bild}(f))$.

d) $\dim \mathrm{Bild}(g \circ f) \leq \min(\dim \mathrm{Bild}(g), \dim \mathrm{Bild}(f))$.

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird in den Tutorien am 15. und 16. Januar 2014 besprochen.

Aufgabe 5.
Die lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sei definiert durch $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir betrachten die Abbildung $L\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $L(g) = f \circ g - g \circ f$.

Zeigen Sie, dass L linear ist und bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bilds von L.