Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe bis 10:00 Uhr
am 15.01.14
in die Postfächer der Tutoren
auf D13

# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“
# Blatt 10

**Aufgabe 1.**
Es sei $K$ ein Körper. Es seien $U$, $V$ und $W$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $f\colon U \to V$ sowie $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Kern}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(g \circ f)$ und $\operatorname{Bild}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Bild}(g)$,

b) $\dim \operatorname{Kern}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Kern}(g)$.
*(Hinweis: Betrachten Sie die lineare Abbildung* $\operatorname{Kern}(g \circ f) \to \operatorname{Kern}(g)$, $x \mapsto f(x)$*.)*

**Aufgabe 2.**
Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathrm{M}_{1\times 4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$, die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathrm{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$ auf die angegeben Vektoren $b_i \in \mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$ abbilden?

a) $a_1 = (1\,1\,0\,0)$, $a_2 = (1\,1\,1\,0)$, $a_3 = (0\,1\,1\,1)$, $a_4 = (0\,0\,1\,1)$ und
$b_1 = (1\,2\,3)$, $b_2 = (2\,3\,1)$, $b_3 = (3\,1\,2)$, $b_4 = (2\,0\,4)$.

b) $a_1 = (0\,1\,1\,1)$, $a_2 = (1\,0\,1\,1)$, $a_3 = (1\,1\,0\,1)$ und $b_1$, $b_2$, $b_3$ wie in a).

c) $a_1 = (0\,1\,1\,1)$, $a_2 = (1\,0\,1\,1)$, $a_3 = (1\,1\,0\,1)$, $a_4 = (-1\,1\,0\,0)$ und $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ wie in a).

d) $a_1 = (0\,1\,1\,1)$, $a_2 = (1\,0\,1\,1)$, $a_3 = (1\,1\,0\,1)$, $a_4 = (0\,2\,0\,1)$ und $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ wie in a).

**Aufgabe 3.**
Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -5x - 18y - 24z \\ 4x + 13y + 16z \\ -2x - 6y - 7y \end{pmatrix}$$

und die $\mathbb{R}$-Basen $\mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B}' := \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

b) Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.

c) Zeigen Sie: $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

**Aufgabe 4.**
Wir betrachten auf dem Polynomring $\mathbb{R}[t]$ die formale Ableitung[1], also die lineare Abbildung

$$d\colon \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t], \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Weiter seien $V$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 5 und $f\colon V \longrightarrow V, p \longmapsto d(p)$, sowie $\mathcal{B} := (t^5, t^4, t^3, t^2, t^1, t^0)$ und $\mathcal{B}' := (t^1 + 3t^5, t^4, t^3 + 2t^5, t^2 + t^5, t^1, t^0)$ Basistupel von $V$.

a) Bestimmen Sie die Dimensionen des Kernes und des Bildes von $d$ und von $f$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^3)$ von $f^3$ bezüglich des Basistupels $\mathcal{B}$ von $V$ und die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

c) Gibt es ein Basistupel $\mathcal{B}''$ von $V$, so dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt?

d) Gibt es ein Basistupel $\mathcal{B}''$ von $V$, so dass $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(f)$ die Einheitsmatrix ist?

[1] Hinweis zur Korrektur: Damit die Abbildung $d$ auch an die aus der Analysis bekannte Ableitung einer Polynomfunktion, wie beispielsweise $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 + x^2$ (mit Ableitung $g'(x) = 4x^3 + 2x^1$) erinnert, darf natürlich das rot markierte $n$ nicht fehlen.