Prof. Dr. M. Reineke
Dr. A.-L. Grensing
BU Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik

Abgabe bis 10:00 Uhr
am 08.01.13
in die Postfächer der Tutoren
auf D13

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra 1“
Blatt 9

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $x, y \in \mathbb{Q}$

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x - y \\ 2x \end{pmatrix}$ b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4x + y + 3z \\ z - b \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.
Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Wir betrachten eine K-lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$. Beweisen Sie:

a) f ist injektiv. $\Longleftarrow$ Für jede linear unabhängige Teilmenge L von V ist $f(L)$ linear unabhängig in W.

b) f ist surjektiv. $\Longleftarrow$ Für jedes Erzeugendensystem E von V ist $f(E)$ ein Erzeugendensystem von W.

c) f ist bijektiv. $\Longleftarrow$ Für jede Basis B von V ist $f(B)$ eine Basis von W.

d) f ist surjektiv. $\Longleftarrow$ Für <u>ein</u> Erzeugendensystem E von V ist $f(E)$ ein Erzeugendensystem von W. Gilt die analoge Aussage auch für a) und c)?

Aufgabe 4. Für jede Matrix $B \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ sei l_B die aus der Vorlesung bekannte lineare Abbildung, also

$$l_B\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, x \longmapsto B \cdot x.$$

a) Bestimmen Sie die multiplikativ inverse Matrix zu

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

und zeigen Sie, dass $l_{A^{-1}}$ die Umkehrabbildung von l_A ist.

b) Es sei V ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4). Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear und bijektiv ist:

$$f\colon V \longrightarrow V, \quad v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \longmapsto a_2v_1 + a_3v_2 + a_4v_3 + a_1v_4$$

c) Zeigen Sie weiter, dass für die folgende lineare Abbildung

$$g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

gilt: $l_A \circ g = g \circ f$. *Wir sagen dann, dass das folgende Quadrat kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow[l_A]{} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Finden Sie eine Umkehrabbildung von $g \circ f$?

Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe geben Sie bitte nicht ab; sie wird in den Tutorien am 18. und 19. Dezember 2013 besprochen.

Aufgabe 5.
Es bezeichne $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ den Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned} L\colon C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto L(f) \end{aligned}$$

ist linear?

(a) $L(f)(x) = f(x)^{13}$	(b) $L(f)(x) = f(x^{13})$	(c) $L(f)(x) = x^{13}f(x)$
(d) $L(f)(x) = f(x) + f(13)$	(e) $L(f)(x) = f(13) \cdot f(x)$	(f) $L(f)(x) = f(13)$
(g) $L(f)(x) = f(\sin(x))$	(h) $L(f)(x) = \sin(f(x))$	